James D. Stein

Come la MATEMATICA può salvarti la vita

Risparmiare,
trovare l’anima gemella
e cambiare il mondo
con l’aiuto dei numeri

MANUALI E GUIDE
NEWTON

MANUALI E GUIDE

NEWTON

124

Titolo originale: *How Math Can Save Your Life*

Traduzione di Alessandra Spirito
Prima edizione ebook: febbraio 2013

Roma, Casella postale 6214

ISBN 978-88-541-4935-9

www.newtoncompton.com

Edizione digitale a cura di geco srl

James D. Stein

Come la matematica può salvarti la vita

NEWTON COMPTON EDITORI

A Maxine e James,
i miei primi insegnanti di matematica

Prefazione

Non si può certo dire che al liceo andassi molto bene in letteratura inglese, anche perché la fantascienza mi appassionava molto di più di Mark Twain o di William Shakespeare. Ho sempre pensato alla fantascienza come alla forma più creativa di letteratura e a Isaac Asimov come a uno dei suoi autori più originali.

Magari non sarà stato all'altezza di Shakespeare nei personaggi o nei dialoghi, ma aveva delle "idee", e le idee sono l'anima e il corpo della fantascienza. Nel 1958, l'anno in cui conseguii il diploma superiore, uscì la prima edizione del racconto di Asimov *Nove volte sette*. Io lo lessi un paio di anni dopo mentre ero all'università e per combinazione avevo trovato un impiego estivo come programmatore: lavoravo su una macchina suppergiù della grandezza di un frigorifero, che leggeva e scriveva i dati sotto forma di nastri di carta bucherellati.

Il racconto di Asimov era ambientato in un lontano futuro in cui tutti possedevano calcolatrici tascabili in grado di svolgere qualsiasi operazione aritmetica, ma nessuno comprendeva le regole e le idee su cui l'aritmetica era basata. Non siamo ancora arrivati a questo punto, ma ci stiamo avvicinando a velocità supersonica. Nel corso degli anni mi sono accorto del declino delle capacità aritmetiche dei miei studenti. Il massimo è stato qualche anno fa, quando una studentessa è entrata nel mio ufficio per farmi una domanda. Stava seguendo un corso benevolmente definito "Algebra universitaria", anche se in realtà si tratta di un mix di Algebra I e Algebra II così come vengono insegnati in migliaia di istituti superiori. Molte osservazioni degli studenti mi avevano portato a credere che non avessero ben compreso le percentuali, quindi avevo assegnato loro un breve test (per i dettagli vedi il capitolo 6). Mentre io e la ragazza esaminavamo il test nel mio ufficio, arrivammo a un problema in cui bisognava calcolare il 10% di un numero.

«Provi a farlo senza la calcolatrice», avevo suggerito.

Lei si era concentrata per qualche secondo, visibilmente agitata. «Non ne sono capace», aveva concluso.

Dopo quell'episodio iniziai a osservare i miei studenti durante lo svolgimento delle prove. Invento di proposito i test che assegno loro in modo che non debbano usare una calcolatrice: voglio verificare se siano capaci di utilizzare le idee spiegate durante il corso, non quanto siano bravi a utilizzare una calcolatrice. Io riesco a risolvere ogni problema delle prove che assegno senza neanche fare ricorso a carta e penna, cosa che sarebbe ad esempio necessaria per le moltiplicazioni a due cifre o per fare la somma di molti numeri in colonna. Mi accorsi, però, che lo studente-tipo trascorreva suppergiù il 20% del tempo a digitare numeri sulla calcolatrice. Che diavolo stava succedendo?

Semplice: l'uso della calcolatrice aveva atrofizzato le competenze aritmetiche, non molto diversamente da quanto predetto da Asimov. Ma una cosa ancora più importante era quella a cui Asimov aveva solo accennato nel suo racconto, senza però dargli grande rilievo. Ecco le ultime righe del racconto: «Nove volte sette, pensò Shuman con profonda soddisfazione, fa sessantatré, e non c'è bisogno di un computer che me lo dica. Quel computer ce l'ho nella testa. E fu stupefacente la sensazione di potenza che ne trasse»[1].

Quasi tutti gli insegnanti di matematica vi diranno che l'importanza dell'aritmetica non sta nella capacità di moltiplicare nove per sette, ma nella consapevolezza dei problemi che possono essere risolti con le moltiplicazioni. Naturalmente è stato questo modo di pensare che all'inizio ha spinto a mettere in mano a ogni scolaro una calcolatrice non appena sembrava in grado di premerne i tasti. L'aritmetica era diventata la pecora nera dello studio della matematica. La convinzione era che, se si riusciva a scavalcare la tediosa routine dei calcoli aritmetici, si poteva procedere velocemente verso la bellezza e la potenza della matematica più evoluta.

Purtroppo, si sono perse di vista tutta la bellezza e la potenza insite nell'aritmetica: sebbene la maggior parte delle persone sia in grado di *eseguire* calcoli, pochi capiscono e apprezzano davvero le possibilità insite nei suoi meccanismi. Quella sensazione di potenza cui si allude nelle ultime righe del racconto di Asimov oggi non è associata alla bravura nel calcolo, ma all'abilità con cui ci si serve di quel potente e bellissimo strumento che è l'aritmetica. Essa può migliorare di gran lunga la qualità – e la durata – della vita. Può arricchire le organizzazioni e le società di cui fate parte. E sì, può addirittura contribuire a salvare il mondo.

Nella stesura di questo libro ho avuto la grande fortuna di ricevere l'aiuto di tante persone. Ci sono alcuni capitoli dedicati a soldi e finanza, i quali costituiscono un importante modello aritmetico, e sono frutto delle mie conversazioni con Merrick Sterling, ex vice-presidente esecutivo del Portfolio Risk Management Group della Union Bank of California. Rick è andato in pensione abbastanza presto e così ha potuto dedicarsi alla sua passione giovanile: l'aritmetica. Così ha preso un master e ha lasciato il suo ufficio da top manager con vista mozzafiato e i benefit che aveva in banca per una semplice scrivania in una stanza condivisa con diversi assistenti part-time. Quando si dice far carriera! Sherry Skipper Spurgeon, che ho conosciuto durante una conferenza a Sacramento sull'adozione dei libri di testo, è l'insegnante più stacanovista che abbia mai incontrato e mi iscriverei senza esitare a qualsiasi progetto pur di avere l'opportunità di lavorare con lei. Ha preso parte a numerosi convegni locali e nazionali sull'insegnamento della matematica nelle scuole elementari ed è molto informata non solo sui programmi ma anche sulle politiche che li ispirano. Robert Mena, preside del mio dipartimento, è estremamente portato per molti campi della matematica in cui io ho competenze limitate, ed è anche un fantastico docente, qualità rara in chi ha una carica amministrativa. Entrando nel suo ufficio la prima cosa che si vede è una parete ricoperta dalle fotografie degli studenti che hanno ricevuto da lui una a. Alcuni ne hanno ricevute addirittura cinque: un tributo non solo alla sua popolarità come professore, ma anche alla varietà dei corsi che tiene.

La mia carriera di autore si sarebbe probabilmente limitata a scrivere in un blog non fosse stato per la mia agente, Jodie Rhodes, che una volta mi confidò di essere riuscita a vendere un libro dopo che era stato rifiutato per duecento volte! È una tenacia che può competere con quella del leggendario re di Scozia Roberto I, o addirittura superla. Mi sono impegnato a fondo per non battere quel record.

Sono stato anche tremendamente fortunato ad avere Stephen Power come editor. Scrivere un testo divulgativo sulla matematica è un compito delicato, specialmente per un accademico, e Stephen mi ha guidato con destrezza tra la Scilla delle opinioni personali non comprovate (ne possiedo a iosa) e la Cariddi di una forma acuta di "spiegazionite", alla quale troppo spesso vanno soggetti i professori. Ancor meglio, è riuscito a farlo con ironia e tempestività. Aspettare i commenti di un editor è snervante quanto aspettare di conoscere l'esito di un esame in cui non hai idea di come sei andato. Se, come sostiene Woody Allen, già esserci è l'ottanta per cento del lavoro, è piacevole collaborare con qualcuno che crede, come me, che l'altro venti per cento consista nell'esserci subito.

Per finire, vorrei ringraziare mia moglie Linda, non soltanto per l'impegno profuso nel correggere le bozze di questo libro, ma anche per la gioia che ha portato in così tanti aspetti della mia vita. Il matrimonio segue un'aritmetica tutta sua, secondo la quale 1+1=1.

Introduzione
Cosa può fare per voi la matematica

Possiamo farci una buona idea di come l'istruzione sia cambiata negli Stati Uniti dando un'occhiata all'interno di una piccola scuola dai muri rossi nel cuore dell'America poco più di un secolo fa.

Salina, Kansas, 1895

Ci sono buone probabilità che non stiate leggendo queste parole a Salina, nel Kansas (popolazione attuale circa 50.000 anime), e certamente non siete nel 1895. Ci sono altrettante probabilità che l'americano medio del ventunesimo secolo non sia neppure lontanamente capace di superare la parte di aritmetica dell'esame finale delle scuole medie. In caso siate scettici, guardate qua[1].

Aritmetica (tempo concesso h 1:25)

1. Enuncia e definisci le regole fondamentali dell'aritmetica.
2. Un carro è profondo 60 cm, lungo 300 cm e largo 90 cm. Quante staia di grano conterrà?
3. Se un carico di grano pesa 1788,06 kg, quale sarà il suo valore a un costo di 50 centesimi per staio, sottraendo la tara di 476,27 kg?
4. Il distretto n. 33 ha un reddito complessivo di $35.000. Qual è la percentuale di imposta da applicare per mandare avanti una scuola per sette mesi a $50 al mese più $104 per le spese occasionali?
5. Calcolate il costo di 3048,14 kg di carbone se questo ha un prezzo di $6 alla tonnellata.
6. Calcolate l'interesse di $512,60 per 8 mesi e 18 giorni al 7%.
7. Qual è il costo di 40 tavole larghe 30 cm e lunghe 5 m a $8 al cm?
8. Calcolate lo sconto bancario su $300 per 90 giorni (senza dilazioni) al 10%.
9. Qual è il prezzo di una fattoria di forma quadrata del costo di $15 per acro, se il perimetro misura 3200 m?
10. Compilate un assegno bancario, una cambiale e una ricevuta.

Se vi lasciassi usare una calcolatrice, vi permettessi di saltare le domande 1 e 10 e vi spiegassi alcune delle costanti fondamentali necessarie allo svolgimento dell'esame, come il volume di uno staio di grano (che serve per la domanda 2), avreste comunque qualche difficoltà. Eppure gli scolari di Salina dovevano essere in grado di passare quest'esame senza l'ausilio di una calcolatrice... e per farlo avevano solo un'ora e venticinque minuti.

Non ho riportato le altre parti dell'esame, ma vale la pena di esaminare almeno questa perché rivela la concezione dell'istruzione nel XIX secolo: preparare i cittadini a diventare membri produttivi della società. Questo non sembra certamente l'obiettivo dell'istruzione ai giorni nostri, o almeno non è quello dell'insegnamento della matematica dopo l'apprendimento delle basi dell'aritmetica. Il mondo oggi è enormemente più complesso di quanto non fosse a Salina, Kansas, nel 1895, ma la matematica può esercitare un ruolo ancora più importante nel preparare i cittadini a diventare membri produttivi della società. Purtroppo questo non avviene, eppure non sarebbe così difficile.

Di quanta matematica c'è bisogno per essere un cittadino produttivo, arricchire la propria vita e quella del gruppo di cui si fa parte? Alquanto a sorpresa, l'aritmetica studiata da uno scolaro di undici anni[2] vi condurrà incredibilmente lontano se la utilizzate bene, e potrete spingervi anche oltre con pochi strumenti supplementari facili da acquisire. Non c'è alcun bisogno dell'algebra, della geometria, della trigonometria o del calcolo.

Ho insegnato matematica nelle università per più di quarant'anni e ho lavorato ai programmi delle scuole primarie e secondarie. Devo ancora trovare una spiegazione soddisfacente sul motivo per cui nel sistema scolastico si continuino a fare indigestioni di algebra dalle medie in poi. Dopotutto, a chi serve davvero l'algebra? Certo, a chi intenda intraprendere una carriera scientifica o ingegneristica, e può essere utile a chi si occuperà di investimenti, ma questo è quanto. La conoscenza dell'algebra è richiesta nei diplomi di scuola secondaria di molti Stati, nonostante prove inconfutabili che, al di là delle persone che davvero ne hanno bisogno (i gruppi summenzionati), l'algebra non serve quasi a nessuno, soprattutto dopo aver superato i test di ammissione al college. Sicuramente nella Salina del 1895 non ci si prendeva la briga di insegnarla. Salina era una comunità agricola, la maggior parte degli studenti finiva a lavorare nelle fattorie o magari in città e c'erano molte incombenze ingrate di cui occuparsi e non aveva senso imparare qualcosa di virtualmente inutile per la maggior parte delle persone. Adesso abbiamo molto più tempo, dato che non dobbiamo alzarci alle cinque del mattino per mungere le mucche e non dobbiamo entrare a far parte della forza lavoro subito dopo la scuola dell'obbligo. Si potrebbe pensare che facciamo buon uso di questo tempo per dar modo ai nostri diplomati delle superiori di ottenere molto di più dalla vita. Non è questo lo scopo dell'istruzione?

Questo è un libro su come la matematica che già conoscete possa aiutarvi a ottenere molto di più dalla vita: dal denaro che spendete, dal lavoro, dall'istruzione e perfino dalla vostra relazione amorosa. È questo lo scopo della matematica. Vorrei riuscire a far capire a ognuno la bellezza e la potenza di quella che viene definita matematica superiore, ma ho insegnato abbastanza a lungo per sapere che ciò non accadrà. Come in qualsiasi altro campo, lo studio del pianoforte per esempio, più ci si addentra nella materia, più questa diventa difficile. La maggior parte dei mestri di piano sanno che coloro che iniziano a studiarlo non saranno mai in grado di eseguire i tre movimenti della *Sonata al chiaro di luna*, ma sanno anche che tutti possono imparare a suonare una semplice melodia con conoscenze sufficienti per ricavarne piacere. Lo stesso accade per la matematica, a parte il fatto che le sue semplici melodie, se ben suonate, possono arricchire sia l'individuo che la società.

Possedete già una tecnica più che sufficiente per imparare a suonare e a trarre profitto da un repertorio sorprendentemente vasto di conoscenze matematiche. E allora incominciamo.

[1] *Could You Have Passed the 8th Grade in 1895? Take a Look*, sito web della Morehead State University: http://people.moreheadstate.edu/fs/w.willis/eighthgrade.html.

[2] Nel testo si parla di *sixth grade*, che equivale al sesto anno di scuola dopo l'asilo. In Italia corrisponde al primo anno delle scuole medie *(n.d.t.)*.

1
Il capitolo più prezioso che possiate mai leggere

I contratti di estensione della garanzia per l'elettronica e gli elettrodomestici sono solo una truffa? • Quante probabilità avete di vincere alla roulette? • Frequentare l'università: ne vale la pena?

Che cos'è il valore? Sul piano filosofico, non ne sono sicuro: ciò che è prezioso per qualcuno potrebbe non esserlo per altri. La cosa più preziosa che ho imparato, dal punto di vista filosofico, è che i periodi brutti sono sempre seguiti da quelli belli e viceversa, ma questa potrebbe essere una nozione valida soltanto per me. Se poi sarà d'aiuto anche a voi, sarà un valore aggiunto. E se questo capitolo vi aiuterà a livello finanziario, sarà anche meglio, perché c'è un unico comune denominatore universale di valore accettato da tutti: il denaro.

Ed è proprio il denaro ciò che rende prezioso questo capitolo, dato che esamineremo alcuni concetti fondamentali che per voi avranno il valore di decine di migliaia – forse centinaia di migliaia – di dollari.

I contratti di estensione della garanzia: un tema che vale migliaia di dollari

Un penny risparmiato è "ancora" un penny guadagnato, ma ai giorni nostri un penny non si può usare nemmeno per il parchimetro, quindi fatemi rendere questo libro un utile investimento che vi consentirà di risparmiare qualche migliaio di dollari. La prossima volta che comprerete un elettrodomestico e il rivenditore vi offrirà un contratto di garanzia, *non prendetelo nemmeno in considerazione*. Una semplice tabella e un po' di matematica di quinta elementare dovrebbero bastare a convincervi.

Immaginate di essere interessati all'acquisto di un frigorifero. Un modello base costa all'incirca $400, e vi viene offerta l'opportunità di sottoscrivere un contratto di estensione di garanzia sui $100. Se accadrà qualcosa al frigorifero nei primi tre anni, il negozio manderà un tecnico a casa vostra per aggiustarlo. Il venditore cercherà di convincervi che si tratta di un'assicurazione a buon mercato per tutelarvi nel caso qualcosa vada storto, ma non è così. Cerchiamo di capire perché.

Ecco qui una tabella della frequenza con cui vari elettrodomestici hanno bisogno di riparazioni. Si tratta di uno studio del 2006 condotto dal Consumer Reports National Research Center sull'affidabilità dei prodotti[1].

PRODOTTO	TASSO DI RIPARAZIONE (PERCENTUALE DEI PRODOTTI CHE NECESSITANO RIPARAZIONI)
Computer portatili	43
Frigoriferi: combinati, con macchina per il ghiaccio e distributore	37
Tagliaerba	32
Trattori da prato	31
Computer da scrivania	31
Lavatrice (carico frontale)	29
Tosaerba automatico	28
Aspirapolvere (a traino)	23
Lavatrice (carico superiore)	22
Frigorifero: freezer superiore e inferiore, con macchina per il ghiaccio	20
Cucina a gas	20
Forno da incasso (elettrico)	19
Tosaerba a spinta (a gas)	18
Piano di cottura (a gas)	17
Forno a microonde (a incasso)	17
Asciugatrice	15
Videocamera (digitale)	13
Aspirapolvere (verticale)	13
Frigorifero: freezer superiore e inferiore, senza macchina per il ghiaccio	12
Cucina elettrica	11
Piano cottura (elettrico)	11
Macchina fotografica (digitale)	10
Televisore catodico da 30 a 36 pollici	8
Televisore catodico da 25 a 27 pollici	6

Tasso di riparazione per articoli che hanno da uno a tre anni.

Servitevi di questa tabella, di un po' di aritmetica elementare, e nell'arco della vostra vita potrete risparmiare migliaia di dollari. Per esempio, prendendo in esame un contratto di estensione di garanzia per un frigorifero, quello con congelatore superiore e inferiore e senza macchina per il ghiaccio avrà bisogno durante i primi tre anni di essere riparato per il 12% del tempo: sarebbe a dire una volta su otto. Quindi se compraste otto frigoriferi e sottoscriveste otto estensioni di garanzia, il costo di tali contratti sarebbe 8 × \$100 = \$800. Eppure, in media, dovreste effettuare un'unica richiesta di assistenza, che vi costerebbe 200 dollari. Quindi, se doveste comprare otto frigoriferi, risparmiereste \$800 – \$200 = \$600 *non* stipulando i contratti di estensione di garanzia: per un risparmio medio di \$600/8 = \$75 a frigorifero. Naturalmente, non comprerete otto frigoriferi, perlomeno non tutti in una volta. Ma anche se nel corso della vostra vita acquisterete meno di otto frigoriferi, con ogni probabilità comprerete un centinaio degli articoli elencati nella tabella. Affidatevi alle medie e, proprio come i casinò a Las Vegas, a lungo andare realizzerete un ottimo profitto.

Utilizzando la tabella potrete risparmiare notevoli somme di denaro. Ci sono essenzialmente due modi per farlo. Il primo è effettuare il calcolo svolto in precedenza, valutando il costo di una riparazione (io prevedo sempre una spesa di \$200, ovvero 100 per l'intervento del tecnico e 100 per i pezzi di ricambio). Il secondo è un approccio più pessimista, secondo il quale, se qualcosa va storto, avrete preso un bidone e dovrete sostituire l'elettrodomestico. Se il costo dell'estensione di garanzia è più elevato del costo medio della sostituzione, quel contratto è una truffa.

Supponiamo, ad esempio, che compriate un forno a microonde per 300 dollari. La tabella dice che quest'elettrodomestico si rompe nel 17% dei casi, quindi una volta su sei. Per calcolare il costo medio di una sostituzione, moltiplicate semplicemente \$300 × 17/100 (o, per semplicità, 1/6). Il risultato sarà all'incirca \$50. Se l'estensione di garanzia vi costa \$50 o di più, vi stanno imbrogliando. Fra l'altro, noterete che un frigorifero combinato con macchina per il ghiaccio e dispenser si romperà tre volte più spesso di un modello base. Come potete acquistare qualcosa che si rompe il 37% delle volte in un periodo di tempo di tre anni? Io mi risparmierei la seccatura e farei le cose alla vecchia maniera, versando l'acqua nelle vaschette per il ghiaccio.

Per finire, osservate che i televisori non si rompono quasi mai. Io possedevo un modello da 25 pollici comprato a metà degli anni Ottanta che mi è durato diciassette anni. A essere sincero, una volta ho dovuto sostituire il tubo catodico. Anche le macchine fotografiche digitali sono abbastanza affidabili.

La media sul lungo termine che deriva da una linea di condotta è chiamata il valore atteso (o speranza matematica o semplicemente speranza) di tale condotta. Secondo me, il valore atteso è il concetto più efficace della matematica in quanto a utilità, e ho intenzione di dedicare parecchio tempo all'analisi degli usi che potrete farne. Per decidere se sottoscrivere o meno il contratto di garanzia per il frigorifero, abbiamo esaminato il valore atteso di due linee di condotta. La prima – sottoscrivere il contratto – ha un valore atteso di –100 dollari; il segno meno è presente perché è naturale pensare al valore atteso in termini dell'influenza che ha sui "vostri" utili, e in questo caso si tratta di una perdita di \$100. La seconda – non sottoscriverlo – ha un valore atteso di –25 dollari. Ricordate? Se aveste comprato otto frigoriferi, uno solo avrebbe bisogno di una riparazione che costerebbe \$200 e \$200/8 = \$25. In molte situazioni ci troviamo di fronte a una scelta fra diverse alternative che possiamo fare con il calcolo del valore atteso. Nell'arco di una vita, calcoli simili avranno per voi un valore minimo di decine di migliaia di dollari. E, come vedremo, potranno valere anche centinaia di migliaia di dollari o più. Questo tipo di proiezione matematica sui costi di una scelta può valere milioni di dollari per piccole organizzazioni e miliardi per le grandi, come le nazioni. Può perfino essere utilizzata per prevenire catastrofi che minacciano l'intera umanità. È per questo che è preziosa.

La media: il concetto più importante della matematica

Ora conoscete la mia opinione, ma non sono l'unico insegnante di matematica a pensarla così: le medie esercitano un ruolo significativo in tutti gli argomenti della matematica di base e in molti di quella avanzata. Ne avete appena visto un esempio in relazione ai contratti di estensione di garanzia. Il calcolo della media occupa un posto significativo nel nostro uso quotidiano della matematica e in quello che vediamo intorno a noi. Semplicemente sfogliando il giornale di oggi, ho trovato riferimenti al reddito familiare medio, all'incasso medio al botteghino dei film attualmente in circolazione, ai punteggi medi effettuati da vari giocatori di pallacanestro, all'età media della prima volta in cui vennero eletti i vari presidenti, e così via.

Perciò, cos'è una media? Quando si ha un insieme di numeri, come i redditi delle varie famiglie americane, bisogna semplicemente sommarli tutti e dividerli per la loro quantità. In breve, una media è la somma di tutti i dati disponibili diviso il loro numero complessivo.

Perché le medie sono così importanti? Perché forniscono molte informazioni sul passato (la media è proprio questo) e sono un buon indicatore per il futuro. Questo ci porta alla legge della media aritmetica.

La legge della media aritmetica

La legge della media aritmetica non è una vera legge, ma rappresenta piuttosto la convinzione fondatissima che nel futuro un valore medio resterà più o meno uguale a quello del passato. A volte questa legge porta le persone a conclusioni errate, come la ben nota falsa credenza che, se si lancia una moneta ed esce testa per dieci volte consecutive, è probabile che al tiro successivo verrà fuori croce per "rientrare nella media". In realtà, in questo caso ci sono due possibilità: la moneta non è truccata e davvero (a lungo andare) uscirà croce un numero di volte uguale a testa, nel qual caso al tiro successivo ci saranno le stesse possibilità che esca testa o croce; o i lanci sono in qualche modo truccati e la moneta darà testa molto più spesso che croce. Se qualcuno mi chiedesse quale faccia verrà fuori al tiro successivo dopo che è uscita testa per dieci volte consecutive, io scommetterei sulla prima: per quanto ne so, è una moneta che ha due teste.

Il rapporto rischio-beneficio (e il gioco d'azzardo)

Le espressioni "rapporto rischio-beneficio" e "giocare d'azzardo" sono entrate a tal punto a far parte del normale vocabolario che intuitivamente possediamo un'idea abbastanza esatta di quello che significano. Il rapporto rischio-beneficio è una stima dell'entità del possibile guadagno paragonata a quella delle perdite e giocare d'azzardo vuol dire giocare scegliendo le alternative che hanno più probabilità di verificarsi.

Nell'uso comune, però, queste frasi vengono usate in senso qualitativo più che quantitativo. I vaccini antinfluenzali si consigliano alle persone anziane perché il rischio associato al prendere l'influenza è grande se comparato al beneficio di non prenderla; in altre parole, il rapporto rischio-beneficio di non vaccinarsi è alto, anche se probabilmente non sapremmo quantificarlo con esattezza. Allo stesso modo, solitamente una squadra di calcio passa la palla perché è più probabile riuscire ad avvicinarsi alla porta avversaria facendo passaggi piuttosto che con un'unica corsa. Ci sono due tipi di percentuali: quelle che derivano da modelli matematici, come il lancio di una moneta non truccata, e quelle che vengono calcolate da una raccolta di dati, come nel caso di una partita di calcio. Quando tiriamo in aria una moneta non truccata non abbiamo bisogno di formulare l'ipotesi che a lungo andare metà dei lanci daranno testa e l'altra metà croce, perché questo presupposto è già insito nel concetto di "moneta non truccata". Se invece vediamo che nel 60% dei casi fare passaggi ha successo, supporremo che continuerà a essere così, perché non abbiamo ragione di credere altrimenti a meno che le regole del calcio non vengano radicalmente cambiate.

Come, e quando, calcolare il valore atteso

L'utilità del concetto di valore atteso è quella di incorporare il rapporto rischio-beneficio e il gioco d'azzardo in un semplice calcolo che dà un'eccellente stima quantitativa del *payoff*[2] medio a lungo termine della decisione presa[3]. Il valore atteso è utilizzato per calcolare il risultato medio sul lungo periodo di un evento che può avere esiti diversi. I casinò di tutto il mondo si fondano proprio sul valore atteso, e le roulette ci forniscono un modo semplice per darne un esempio. La ruota di una roulette ha 36 numeri (da 1 a 36), metà rossi e metà neri; negli Stati Uniti compaiono anche lo 0 e lo 00, che sono verdi. Se scommettete 10 dollari sul rosso ed esce un numero rosso, vincete 10 dollari, altrimenti li perdete. Per calcolare il valore atteso della vostra scommessa, supponiamo che facciate girare la ruota in modo che i numeri escano conformemente alle leggi della probabilità. Ad esempio, supponiamo di far girare la ruota 38 volte e che ognuno dei 38 numeri – da 1 a 36, 0 e 00 – esca una volta (è questo che intendo quando dico che escono in conformità con le leggi della probabilità). I numeri rossi rappresentano 18 delle 38 volte, e quando escono vincete 10 dollari, per un totale di 18 × \$10 = \$180. Perdete le altre 20 scommesse, per un totale di 20 × \$10 = \$200. Ciò significa che, su 38 giri della ruota, perdete 20 dollari, una perdita media di poco più di 0,52 dollari a giro. Il valore atteso per ogni giro sarà in questo caso di –0,52 dollari, e i casinò e tutte quelle luci al neon si fondano sui vostri contributi e su quelli dei vostri compagni di gioco.

Il valore atteso è di solito espresso come percentuale. Nell'esempio precedente, avremo una perdita media di 0,52 dollari su una puntata di 10. Dato che 0,52 corrisponde al 5,2% di 10, a una puntata sul rosso può essere attribuito un valore atteso del –5,2%. Questo ci permette di calcolare la perdita attesa per puntate di ogni valore. I casinò sanno qual è il valore atteso di una puntata sul rosso e possono riesaminare le loro registrazioni per verificare che il valore atteso reale sia prossimo a quello calcolato. Se così non è, forse la ruota ha bisogno di essere riequibrata, oppure sta succedendo qualcosa di losco.

Il valore atteso può essere utilizzato solo nelle situazioni in cui le probabilità e i benefici associati possono essere quantificati con una certa accuratezza, ma ciò capita abbastanza di frequente. I miei tanti impegni mi obbligano a fare in macchina un bel po' di chilometri: è uno degli svantaggi di vivere a Los Angeles. Spesso ci sono due modi per arrivare a destinazione: le superstrade o le strade normali. Le superstrade sono più veloci, ma ogni tanto succede qualcosa (un incidente o un posto di blocco) che causa grossi ritardi. Le strade ordinarie sono più lente, ma non si verifica quasi mai un evento che paralizzi completamente il traffico. Nonostante ciò, come molti abitanti di Los Angeles, io eseguo un calcolo del valore atteso: se posso scegliere, prendo la superstrada perché in media così facendo risparmio tempo. Non sempre è necessario il calcolo del valore atteso: la semplice osservazione e l'esperienza forniscono una buona stima di quel che succederà, ed è per questo motivo che chi vive a Los Angeles usa la superstrada. Neanche per la ruota della roulette bisogna effettuare dei calcoli: basta andare a Las Vegas, fare un bel po' di scommesse e guardare la vostra mazzetta di banconote che si assottiglia con il passare del tempo.

Assicurazioni: una questione che vale decine di migliaia di dollari

Nell'industria del gioco d'azzardo circola moltissimo denaro, ma è niente al confronto di un'altra industria da un trilione di dollari. Sto parlando di quella delle assicurazioni, che ricava i suoi profitti grossomodo nella stessa maniera dell'industria del gioco d'azzardo. Ogni volta che sottoscrivete una polizza di assicurazione state facendo una scommessa, che "vincerete" nel caso succeda qualcosa che vi permetta di incassare l'indennizzo, o "perderete" se ciò non accade. La compagnia di assicurazioni ha calcolato il valore medio del risarcimento (pensate a un incidente automobilistico) e vi chiede di pagare un premio abbastanza alto da assicurarle un profitto, così da rendere negativo il vostro valore atteso.

Ma questo è un gioco a cui non potete fare a meno di partecipare. Se possedete un'automobile dovete avere un'assicurazione e c'è una serie di polizze (sulla vita, sulla salute, sulla casa) che conviene sottoscrivere anche se il vostro valore atteso è negativo, semplicemente perché non potete permettervi di affrontare il costo di una catastrofe. Eppure, esiste un modo corretto di partecipare al gioco delle assicurazioni, e conoscerlo avrà sul lungo periodo un valore di decine di migliaia di dollari (forse anche di più).

Vediamo cosa succede quando si paga la polizza auto, cosa che molti fanno ogni sei mesi. La mia compagnia di assicurazioni mi offre la scelta tra una con franchigia di 100 dollari per 300 dollari di premio, o una con franchigia di 500 dollari per 220 dollari di premio. Se sottoscrivo la prima e ho un incidente, mi faccio fare due preventivi per la riparazione e vado dal meccanico che mi fa quello più basso (la procedura standard per le compagnie di assicurazioni). La compagnia mi spedisce un assegno per l'ammontare della riparazione meno 100 dollari. Se avessi acquistato la polizza con franchigia di 500 dollari, mi avrebbe spedito un assegno per l'ammontare della riparazione meno questa somma. La polizza con franchigia più alta è più economica dell'altra perché, in caso di incidente, la compagnia di assicurazioni risparmierà 400 dollari.

Un calcolo del valore atteso che si basi sul vostro passato da automobilisti è un buon metodo per decidere quale opzione scegliere. Io guido da cinquanta anni e ho sottoscritto un centinaio di polizze semestrali. Durante questo periodo ho avuto tre incidenti. Uno era per colpa mia: ero distratto. Gli altri due sono avvenuti entrambi nel 1983, nel corso di tre giorni: in tutti e due i casi *non mi stavo neanche muovendo* e un'automobile mi è venuta addosso e mi ha distrutto la macchina. Ora, però, sto diventando vecchio e probabilmente non sono più bravo come si potrebbe dedurre dal mio passato, quindi ritengo che la stima di un incidente ogni cinque anni sia probabilmente più accurata di quella di tre ogni cinquanta. Questo significa che se sottoscrivo dieci polizze (due all'anno per cinque anni) e scelgo quella con franchigia di 100 dollari invece di 500, risparmierò 80 dollari per ognuna delle nove volte che non farò incidenti e perderò 400 dollari la volta in cui lo farò. Perciò, acquistando la polizza con franchigia di 100 dollari, risparmierò una media di 32 dollari, dato che $(9 \times \$80 - \$400)/10 = \$32$. In realtà, il risparmio sarà ancora maggiore per due ragioni. Credo che la stima di un incidente ogni cinque anni sia un po' troppo prudente, ma, cosa ancor più importante, se ho un incidente che non mi conviene dichiarare (ad esempio, vado a sbattere contro il muro del garage perché sbaglio a fare marcia indietro) provvederò alla riparazione di tasca mia, perché so che il premio che devo pagare avrà un'impennata ogni volta che presento una richiesta d'indennizzo.

Vi capiterà in diversi casi di dover fare un simile calcolo perché l'opzione tra diverse franchigie vi si presenterà ogni volta che sottoscriverete un'assicurazione – sulla salute, sulla casa e così via – e voi e la vostra famiglia ne stipulerete parecchie nel corso degli anni. Per alcune persone il risparmio derivante da una scelta giusta potrebbe essere dell'ordine delle centinaia di migliaia di dollari.

Dato che un fattore cruciale nei calcoli è la stima della probabilità che si verifichino alcune eventualità, è importante avere un'idea di come stabilirlo. Quando sottoscrivete una polizza auto, vi basate sul vostro passato da guidatori, ma se siete dei novellini potete fare riferimento alle statistiche sugli incidenti causati da persone simili a voi. Ad esempio, una ragazza di venticinque anni può cercare un calcolo statistico degli incidenti causati da donne tra i venti e i trent'anni: esistono numerosi siti web dove trovare informazioni simili. Se state pensando di stipulare una polizza contro i terremoti, cercate qualcosa sulla frequenza con cui si verificano nel luogo dove vivete. Se siete in una zona dove non c'è mai stato un evento sismico, perché mai dovreste assicurarvi?

Facciamo una pausa

Magari sarete un po' stanchi dopo tutti questi calcoli. Per fortuna, oggi parteciperete alla registrazione di uno dei vostri quiz televisivi preferiti. Come sapete, spesso c'è un turno preliminare in cui il concorrente vince dei soldi. Il conduttore poi cerca di persuaderlo a rischiare nel tentativo di vincere ancora di più. Incredibilmente, siete stato prescelto tra il pubblico in studio per essere uno dei concorrenti del gioco, siete riusciti a rispondere alla domanda su chi sia sepolto nella tomba di Grant e avete vinto 100.000 dollari. Il conduttore si congratula con voi per la vostra grande cultura e sul fondo del palco si apre una tenda a rivelare tre porte. Il conduttore vi informa che dietro una si trova un assegno da 1.000.000 di dollari e dietro le altre due la scorta per un anno del prodotto che sponsorizza la trasmissione: un dentifricio. Poi vi dice di scegliere una porta e, oltre ai 100.000 dollari che avete già vinto, riceverete qualsiasi cosa si trovi dietro di essa.

Il tre è sempre stato il vostro numero fortunato, quindi provate con la terza. Il conduttore s'incammina verso la numero tre, ha un attimo di esitazione... e gira il pomello della seconda. Una cascata di tubetti di dentifricio invade il palco. Il conduttore, ora immerso nel dentifricio fino alle ginocchia, si gira e dice: «Ho una proposta per lei! Può tenersi i 100.000 dollari e qualsiasi cosa si trovi dietro la tre, o può restituirmi i 100.000 dollari e prendere quello che c'è dietro la numero uno». Voi che fareste?

Faccio questa domanda in tutte le classi in cui insegno probabilità. Tutti gli studenti terrebbero i 100.000 dollari e qualunque cosa ci sia dietro la terza porta. Dopotutto, in molti si sentirebbero a disagio nel lasciarsi sfuggire l'uovo oggi per la gallina domani.

Per rispondere correttamente occorre considerare alcuni fattori esterni. Per esempio, se ci fosse un bambino che ha assoluto bisogno di un'operazione del costo esatto di 100.000 dollari e questo fosse il solo modo per procurarveli, è chiaro che dovreste tenerli. Questi soldi varrebbero per voi molto di più del milione che potreste ricevere; gli economisti hanno formulato il concetto di "utilità marginale" per descrivere il fatto che ogni dollaro, oltre i 100.000 necessari per l'operazione, possiede un valore di gran lunga meno significativo di quelli che fanno parte di tale somma.

Supponiamo, però, che voi consideriate tutti i soldi di ugual valore e che, trovandovi in questa situazione, vi sentiate obbligati a giocare in modo da riuscire a guadagnare la somma più alta. In altre parole, desiderate seguire la linea di gioco che vi dà il maggior valore atteso. In tal caso, dovreste rinunciare ai 100.000 dollari (seppur con dispiacere) e tentare di prendere quel che c'è dietro la porta numero uno, perché la probabilità che dietro di essa si trovi il premio più alto è doppia rispetto a quella che sia alla porta tre!

La maggior parte delle persone trova questa situazione molto difficile da comprendere (il termine esatto è controintuitiva) quando la affronta per la prima volta. Come può essere due volte più probabile che si trovi dietro la porta uno invece che dietro l'altra? Sì, ma ciò che confonde (a volte nei problemi matematici ci sono dei punti che traggono in inganno) è il fatto che non vi si chiede di scegliere fra la tre e la uno, ma fra la tre e *le altre due porte*. E capita che abbiate appena visto che dietro una delle altre due porte ci sia il dentifricio. Per rendere il tutto un po' più facile, supponiamo che ci siano mille porte invece di tre, e che solo una di loro nasconda un assegno da 1.000.000 di dollari. Come prima, il conduttore le apre tutte eccetto la numero tre (scelta da voi) e la uno e (stavolta immerso nel dentifricio fino al collo) vi chiede se volete cambiare. All'inizio la vostra probabilità di indovinare la porta giusta era 1 su mille, e questo vale ancora per la porta tre, perché non è accaduto nulla che possa cambiare tale eventualità: ma ci sono 999 possibilità su 1000 che l'assegno sia dietro la porta numero uno.

Adesso potete constatare che nel problema originario delle tre porte, c'è una possibilità su tre che l'assegno da un milione di dollari si trovi dietro la terza porta scelta da voi e due possibilità su tre che si trovi dietro la numero uno. Se restate fedeli alla vostra scelta iniziale, pensando che il dentifricio non valga nulla, avete due possibilità su tre di vincere 100.000 dollari e una su tre di vincerne 1.100.000, per una media di poco più di 433.000 dollari: ecco perché 433.000 dollari è il valore atteso della porta numero tre. Se cambiate e scegliete la uno, avrete una possibilità di vincere 0 dollari (ahi!) ma due possibilità di vincerne 1.000.000, per una media di poco inferiore a 667.000 dollari: ecco perché 667.000 dollari è il valore atteso della porta numero uno.

Ho accennato prima ai fattori esterni di cui occorre tenere conto. Se siete sposati e cambiate porta, rinunciando ai 100.000 dollari, e ne uscite con nient'altro che dentifricio, siate pronti a farvelo rinfacciare da vostra moglie fino alla fine dei tempi[4].

Andare all'università: una decisione che vale centinaia di migliaia di dollari

Finora abbiamo preso in considerazione due avvenimenti normalissimi: l'acquisto di un frigorifero e la scelta di una polizza di assicurazione. Ora consideriamone uno straordinario: decidere se iscriversi o meno all'università. Sebbene molti di noi lo facciano, l'uso del termine "straordinario" è giustificato dal dizionario, poiché frequentare l'università è per la maggior parte di noi un'esperienza che avviene una volta nella vita ed è del tutto eccezionale nell'ambito della nostra esistenza.

Agli inizi degli anni Novanta, lavorai a un progetto che coinvolgeva alcuni professori delle superiori. Uno di loro insegnava matematica in un istituto della San Fernando Valley e mi disse che aveva cercato di persuadere uno dei suoi migliori studenti ad andare all'università. All'ultimo istante, il ragazzo aveva detto al professore che gli era stato offerto un buon lavoro nell'edilizia e aveva deciso di accettarlo, invece di proseguire gli studi.

Molti dei lettori di questo libro si saranno trovati a dover prendere questa decisione o una simile: devo accontentarmi di un diploma o di una laurea breve e cercarmi un lavoro oppure proseguire gli studi per diventare medico o avvocato? È una delle scelte più importanti in assoluto da un punto di vista finanziario. Andare all'università vi costerà soldi e potreste non farcela a laurearvi. Vi terrà fuori del mercato del lavoro per parecchi anni. D'altra parte, però, un laureato guadagna molto di più di chi ha solo un diploma di istruzione secondaria. Qual è la cosa giusta da fare? è quasi sempre proseguire gli studi. Sì, ve lo diranno in molti, ma qui ve lo dimostrerò con la matematica. Nel 2004, chi aveva un diploma di maturità guadagnava in media circa 28.000 dollari all'anno, mentre un laureato ne prendeva circa 51.000[5]. Pur supponendo che le vostre possibilità di laurearvi in un'università pubblica siano del 50% e che frequentare una facoltà per cinque anni (il tempo mediamente necessario a uno studente-tipo nell'ateneo in cui insegno io) e laurearvi vi costi 50.000

dollari, vediamo quale sarà il vostro tornaconto. Se avete diciotto anni e un diploma e state progettando di lavorare finché non ne avrete sessantacinque (sarebbe a dire quarantasette anni), il costo che dovrete affrontare (rispetto al diplomato che s'inserisce subito nel mercato del lavoro) se non riuscirete a laurearvi sarà di 50.000 dollari più cinque anni di guadagni a 28.000 dollari, per un totale di 190.000. Se però vi laureate dopo cinque anni di università, avrete sì perso un lustro di guadagni a 28.000 dollari l'anno e speso 50.000 di tasse rispetto al diplomato che è andato subito a lavorare, ma ne guadagnerete 23.000 di più l'anno per i quarantadue anni in cui farete parte della forza-lavoro. Si tratta di un guadagno netto di 776.000 dollari. Supponiamo di lanciare una moneta (con probabilità analoghe al vostro 50% di laurearvi) e che, se uscirà testa, vincerete 776.000 dollari, mentre se verrà croce ne perderete 190.000: il vostro valore atteso sarà di 293.000 dollari. Si tratta di un calcolo molto prudente: la percentuale di coloro che si laureano è generalmente molto più alta del 50%. Se le vostre probabilità di laurearvi sono del 75% – tre su quattro – supponete di vincere 776.000 dollari tre volte e perderne 190.000 una sola, per un guadagno medio di (3 × \$776.000 – 1 × \$190.000)/4 = \$534.500! (Il mio commento potrebbe essere considerato un po' di parte, ma credo che se state leggendo questo libro, le vostre probabilità di laurearvi sono decisamente più alte del 50%). Se eseguirete lo stesso calcolo a proposito della decisione di conseguire o meno una laurea specialistica, i risultati saranno simili.

Una lunga stagione

Un mio amico una volta ebbe una conversazione con un giocatore professionista che si guadagnava da vivere con successo scommettendo sulle partite di baseball, football e basket. Ognuno di questi tre sport ha la sua stagione, anche se si sovrappongono leggermente; in sostanza possiamo dire che un anno è fatto da una stagione di baseball, una di football e una di basket. Il giocatore confidò al mio amico che, anche se gli piaceva ottenere un profitto alla fine di ogni stagione, doveva ammettere che a volte si vinceva e a volte si perdeva. La chiave stava nel considerare la vita come una lunga stagione: l'importante era ottenere un profitto sul lungo periodo.

Lo stesso è vero per il gioco d'azzardo. Certe situazioni si ripresenteranno, come sottoscrivere una polizza auto o un'estensione di garanzia, ed è facile capire che la legge della media aritmetica funziona in questo tipo di casi. Altre cose, però, come la decisione di andare all'università, si presentano sostanzialmente una volta sola: anche se c'è chi interrompe gli studi e li riprende per laurearsi trent'anni più tardi, la maggioranza delle persone che abbandonano per molti anni non si laurea più. Ciononostante, ogni volta che nel corso della vostra vita deciderete in base al calcolo del rapporto rischio-beneficio, avrete le più alte probabilità di ottenere un profitto. E, nel corso di quella lunga stagione che è la vita, è questa la migliore strategia.

[1] *Why You Don't Need an Extended Warranty* , www.consumerreports.org/cro/money/news/november - 2006/why - you - dont - need - an - extended - warranty - 11 _ 06/overview/extended - warranty - 11 - 06.htm.

[2] *Payoff* è un termine utilizzato in vari ambiti, ed è riferito ai valori associati ai possibili esiti di un'azione o di un evento. Talvolta viene reso in italiano con termini quali: *risultato*, *premio*, *ricompensa*, *pagamento* (*n.d.t.*).

[3] Vedi www.csulb.edu/~rmena/Discrete/notes%20for%20Discrete.pdf. si tratta delle dispense del professor Robert Mena per un corso di matematica discreta che include la teoria delle probabilità.

[4] *Game Show Problem*, www.marilynvossavant.com/articles/gameshow.html. Questo dilemma, quando Marilyn vos sant lo presentò in una delle sue rubriche, sollevò una marea di contestazioni. se credete che la matematica sia così scontata da mettere d'accordo tutti gli esperti sulla soluzione di un problema, farete meglio a ricredervi. E andatevi a leggere tutte le e-mail ricevute dall'autrice!

[5] *College Degree Nearly Doubles Annual Earnings*, rapporti del censimento: www.census.gov/Press - Release/www/releases/archives/education/004214.html.

2
Come la matematica può aiutarvi a capire le strategie sportive

Perché quasi certamente Bart Simpson potrebbe batterci a morracinese? • In cosa consistono le strategie “pure” e quelle “miste”? • È più probabile effettuare un primo *down* con un *pass-play* o con un *run-play*?

Molti problemi importanti che incontriamo nella vita hanno a che fare con la competizione. A volte facciamo a gara per emergere dalla folla, ad esempio quando ci candidiamo per un lavoro o magari partecipiamo ad *American Idol*[1]. Spesso, però, siamo noi contro un singolo avversario, anche se costituito da un insieme di persone: a volte è la “direzione”, a volte i “genitori” e così via. Queste situazioni di conflitto “uno-contro-uno” sono state ampiamente studiate nella prima metà del ventesimo secolo, e ne è emersa un’importante disciplina: la teoria dei giochi.

La morra cinese

Molti aspetti della teoria dei giochi possono essere spiegati analizzando la morra cinese, un gioco assai diffuso che, curiosamente, sembra essersi affermato in diverse culture. Per coloro che non lo conoscono bene, si fa così: dopo aver contato fino a tre, ognuno dei due giocatori sceglie uno fra tre oggetti – sasso, carta, forbici – e ne fa il gesto con la mano. Il pugno chiuso rappresenta il sasso, la mano aperta la carta, e un pugno con indice e medio a formare una V le forbici.

Se entrambi i giocatori scelgono lo stesso oggetto, si ha un pareggio. In caso contrario, il vincitore si determina secondo queste regole:

- il sasso rompe (sconfigge) le forbici;
- le forbici tagliano (sconfiggono) la carta;
- la carta avvolge (sconfigge) il sasso.

Il gioco viene spesso ripetuto più volte per stabilire un vincitore: due bambini che devono decidere chi dovrà svolgere un compito noioso come quello di lavare i piatti potrebbero sfidarsi a morra cinese, e il primo che vince per tre volte la scampa.

Per analizzare questo gioco, immaginiamo di essere costretti a sfidare un computer che ha memorizzato alla perfezione tutte le migliaia di partite che abbiamo già giocato. Se abbiamo la tendenza a scegliere uno dei tre oggetti in particolare, il computer ne approfitterà spietatamente. Per esempio, supponiamo che la nostra storia di gioco dimostri che abbiamo scelto sasso il 38% delle volte e carta nel 30% dei casi. Il computer opterà sempre per la carta e su 100 partite ne perderemo

38, ne vinceremo 32 e ne pareggeremo 30, per una perdita netta di 6 partite. Il modo per impedire al computer di sfruttare questa nostra tendenza è evitare ogni preferenza per un oggetto, il che può essere fatto scegliendo ciascuno di essi per un terzo del tempo.

Se, però, stiamo giocando contro un calcolatore infallibile, c'è un altro trabocchetto che dovremo evitare. Non solo dobbiamo scegliere ogni oggetto per un terzo delle volte, ma anche evitare di seguire uno schema predeterminato, come sasso-carta-forbici-sasso-carta-forbici-sasso-carta-forbici: il computer se ne accorgerebbe e adotterebbe un'ovvia contromisura, perché saprebbe con precisione cosa stiamo per scegliere. Qualora dovessimo rivelare un lievissimo abbozzo di schema, ad esempio scegliere sasso il 38% delle volte dopo aver optato per due forbici consecutive, il computer lo individuerebbe e se ne servirebbe. Quindi, dobbiamo propendere per un oggetto in un terzo delle volte e farlo a caso, cosicché non ci sarà alcuno schema da sfruttare. Potremmo fare qualcosa del genere: lanciare un dado a sei facce (nascondendo il risultato al computer), e scegliere sasso se esce 1 o 2, forbici con 3 o 4 e carta con 5 o 6. Supponendo che i lanci del dado siano del tutto casuali, sceglieremo ogni oggetto per un terzo delle volte senza alcuno schema, e perfino un calcolatore infallibile non sarà in grado di batterci.

Ma anche la scelta di questa strategia presenta un inconveniente. Se dovessimo sfidare il giocatore di morra cinese più ottuso che esista, Bart Simpson, che sceglierà sasso ogni singola volta pensando: «Caro vecchio sasso. Niente lo batte», finiremo per non vincere. A differenza di Lisa Simpson, che sa che Bart sceglie sempre sasso e gioca di conseguenza, quando sfideremo suo fratello, lo batteremo un terzo delle volte (con la carta), perderemo in un terzo dei casi (scegliendo forbici), e pareggeremo per un altro terzo (con il sasso). Chiunque abbia mai partecipato a un qualsiasi gioco, da uno fisico come il football a uno tutto di testa come il poker, potrà raccontare che è molto più pericoloso sottovalutare l'avversario piuttosto che sopravvalutarlo. Quindi la teoria dei giochi è costruita con la supposizione di giocare contro un avversario intelligente, capace di fare tesoro di ogni nostro potenziale errore.

La morra cinese è un esempio di quello che viene chiamato un gioco 3 × 3: ognuno dei due avversari può scegliere fra tre differenti strategie. I primi libri sulla teoria dei giochi vennero scritti durante la Guerra Fredda, quando i sovietici erano i rossi e gli americani i blu, e gli avversari venivano normalmente indicati appunto con questi due colori[2]. Stranamente, la situazione veniva analizzata dal punto di vista del rosso, tradizione alla quale ci siamo attenuti. Per descrivere il gioco a livello matematico, il risultato di ogni possibile scelta è stato espresso sotto forma di matrice.

ROSSO	BLU		
	Sasso	*Carta*	*Forbici*
Sasso	0	–1	1
Carta	1	0	–1
Forbici	–1	1	0

La riga che inizia con la parola "Carta" rappresenta i risultati che si avranno quando il Rosso sceglie la carta; similmente, la colonna con l'intestazione "Sasso" rappresenta i risultati ottenuti quando il Blu sceglie il sasso. Il numero che si trova contemporaneamente nella fila "Carta" e nella colonna "Sasso" è 1, che rappresenta la vincita del Rosso rispetto al Blu quando il primo sceglie la carta e il secondo il sasso.

Se però nella riga di "Carta" e nella colonna di "Sasso" ci fosse il numero 2, sarebbe più probabile che il Rosso scegliesse la carta, perché totalizzerebbe 2 punti tutte le volte che il Blu opta per il sasso. Questo cambiamento renderebbe anche meno probabile la scelta del sasso da parte del Blu.

I matematici hanno costruito una teoria per analizzare i giochi cosiddetti $m \times n$, cioè quelli in cui il Rosso ha una scelta di m strategie e il Blu di n. L'analisi matematica di tali giochi non rientra negli scopi di questo libro (una trattazione ben fatta e leggibilissima compare nel testo classico di j.d. Williams *Il perfetto stratega*[3], scritto negli anni Cinquanta). Ma l'aritmetica da sola sarà sufficiente ad analizzare una classe molto importante di giochi, quelli 2 × 2, dove ogni giocatore può scegliere fra due strategie.

Il football americano

Nel corso degli anni, il football americano è diventato lo sport preferito negli USA. Darò quindi per scontato che i lettori statunitensi abbiano familiarità con le sue regole, ma l'analisi del gioco che esporrò sarà facile da capire anche per chi non ha mai visto una partita di football, semplicemente considerando i numeri. Immaginate che le tre strategie del Rosso a morra cinese fossero indicate come Rosso 1 (la prima riga), Rosso 2 e Rosso 3, e analogamente le tre strategie del Blu. Sappiamo che quando un giocatore sceglie una particolare strategia ne deriva un payoff, ed è tutto ciò che ci serve sapere per analizzare il gioco.

Consideriamo una situazione molto nota nel football: *third and six*, terzo *down*[4] e sei. L'obiettivo in attacco è ottenere un primo down e l'obiettivo in difesa è impedire che ciò accada. L'attacco ha due strategie fondamentali: correre o passare. La difesa ne ha altrettante: difesa contro le corse (principalmente per bloccare le azioni di corsa dell'attacco) o difesa contro i passaggi (per lo più con lo scopo di fermare un passaggio degli attaccanti). I numeri nella matrice dei payoff che segue rappresentano la percentuale delle volte in cui l'attacco ha successo, in base alle scelte strategiche di ciascuna squadra. Un allenatore di football che volesse effettuare un'analisi di questo tipo si servirebbe di percentuali calcolate empiricamente, sulla base dei risultati dei match precedenti, ma i numeri qui utilizzati sono stati scelti solo perché ci sembrano plausibili e si prestano a un rapido calcolo.

STRATEGIA DI ATTACCO	STRATEGIA DI DIFESA	
	Difesa contro le corse	*Difesa contro i passaggi*
Azione di corsa	10	30
Azione di passaggio	70	40

Non serve un ingegnere missilistico – o un allenatore che percepisce un lauto compenso – per capire cosa succederà in questo caso. Se gli attaccanti decidono di passare la palla, la loro eventualità peggiore è di avere successo il 40% delle volte. Dato che il peggior risultato con un'azione di passaggio è più vantaggioso del miglior risultato con un'azione di corsa, gli attaccanti sceglieranno *sempre* di passare.

Proprio come in attacco si cerca di massimizzare il numero di volte in cui si otterrà un primo down – in altre parole, si cerca una strategia che nel tempo dia il valore di payoff più elevato –, in difesa si vuole minimizzare il numero delle volte in cui gli attaccanti ottengono un primo down e si cerca una strategia che nel tempo dia il valore di payoff più basso. Ma i difensori non possono fare la stessa analisi degli attaccanti. Il loro peggior risultato, quello con la difesa contro le corse (gli attaccanti ottengono un primo down il 70% delle volte) è meno vantaggioso del loro miglior risultato con la difesa contro i passaggi (gli attaccanti ottengono un primo down il 40% delle volte). Oltre a ciò, il loro peggior risultato con la difesa contro i passaggi (gli attaccanti ottengono un primo down il 30% delle volte) è meno vantaggioso del loro miglior risultato con la difesa contro le corse (gli attaccanti ottengono un primo down il 10% delle volte).

La difesa però è perfettamente in grado di analizzare il gioco dal punto di vista degli attaccanti, e si rende conto che questi passeranno *sempre*. Sapendo ciò, può scegliere la sua migliore strategia cercando semplicemente di minimizzare il numero sulla riga "Azione di passaggio", e perciò adotterà *sempre* una difesa contro i passaggi sul *third and six*. In questo caso, si dice che ognuna delle parti ha adottato una strategia "pura", compiendo sempre la stessa azione, piuttosto che "mischiare" come si fa quando si gioca bene a morra cinese. Quando in attacco si sceglie sempre di passare e in difesa si utilizza sempre la difesa contro i passaggi, gli attaccanti hanno successo il 40% delle volte. E il numero 40 viene definito "valore di gioco".

C'è un aspetto della situazione che merita di essere sottolineato. Una volta che ogni parte ha scelto la sua strategia valida, ogni deviazione viene punita. Se in attacco si decide di correre quando la difesa si sta smarcando dai passaggi, le probabilità di successo scendono dal 40 al 30%. Se la difesa opta per difendersi da un'azione di corsa mentre in attacco si sceglie di passare, le probabilità di successo degli attaccanti aumentano dal 40 al 70%.

Se scambiamo le righe con le colonne della matrice a p. 31 (e trasformiamo la partita in una competizione più generica fra Rosso e Blu) otterremo:

ROSSO	BLU	
	Blu 1	*Blu 2*
Rosso 1	10	70
Rosso 2	30	40

Se dovessimo analizzare questa partita dal punto di vista del Rosso, non ci sarebbe una strategia ovvia: il peggior risultato del gioco di Rosso 1 (10) è inferiore al miglior risultato del gioco di Rosso 2 (40). Similmente, il peggior risultato del gioco di Rosso 2 (30) è minore del miglior risultato del gioco di Rosso 1 (70). Le cose, però, si fanno più chiare dal punto di vista del Blu: il peggior risultato della strategia di Blu 1 (30) è più vantaggioso del miglior risultato della strategia di Blu 2 (40, e ricordate che i numeri più bassi sono quelli più favorevoli al Blu). Perciò il Blu adotta *sempre* la strategia Blu 1, e, sapendo questo, il Rosso giocherà *sempre* secondo Rosso 2. Il valore di gioco sarà 30.

In ciascuna delle due partite precedentemente analizzate, una parte ha davanti a sé una scelta evidente: il suo peggior risultato ottenuto seguendo una delle strategie è più vantaggioso del miglior risultato ottenuto seguendo l'altra. Nella matrice a p. 31, se il numero 30 venisse cambiato in 40, sarebbe ancora corretto per il Blu applicare la strategia Blu 1, perché il peggiore risultato in Blu 1 è buono almeno quanto il migliore dell'altra strategia. Nell'analisi di un gioco 2 × 2, il primo passo è vedere se una delle due parti ha una strategia in cui il peggior risultato sia vantaggioso almeno quanto il miglior risultato dell'altra strategia. Se è così, l'analisi procede in modo semplice, con un giocatore che fa sempre la cosa ovvia e l'altro che agisce per reazione sapendo quello che farà l'avversario.

C'è un altro modo per vedere se una delle due parti segue una strategia pura. Diamo un'altra occhiata al primo caso che abbiamo esaminato.

STRATEGIA DI ATTACCO	STRATEGIA DI DIFESA	
	Difesa contro le corse	*Difesa contro i passaggi*
Azione di corsa	10	30
Azione di passaggio	70	40

Dal punto di vista degli attaccanti, è facile vedere come sia meglio passare piuttosto che correre, a prescindere dalla strategia difensiva che si affronterà. Se si tratterà di una difesa contro le corse, un passaggio avrà successo il 70% delle volte, rispetto al 10% in cui ha successo un'azione di corsa. Se invece gli attaccanti incontrano una difesa contro i passaggi, un passaggio avrà comunque più probabilità di successo di una corsa. Quindi un passaggio è chiaramente preferibile a una corsa in entrambi i casi.

Ma cambiamo un po' i numeri.

STRATEGIA DI ATTACCO	STRATEGIA DI DIFESA	
	Difesa contro le corse	*Difesa contro i passaggi*
Azione di corsa	50	30
Azione di passaggio	70	40

Adesso il peggio che può capitare quando la squadra in attacco passa non è altrettanto vantaggioso del meglio che può capitare quando corre, perciò non possiamo affermare immediatamente che gli attaccanti passeranno sempre. Ma quando esaminiamo la situazione caso per caso, vediamo che un passaggio ha sempre maggior successo di una corsa, a prescindere dalla strategia adottata dalla difesa, perciò la squadra in attacco senza dubbio passerà.

Nello schema precedente, gli attaccanti mettono in atto una strategia pura poiché passare è preferibile a un'azione di corsa contro entrambe le strategie di difesa, anche se il risultato peggiore nel primo caso non sia più vantaggioso del miglior risultato del secondo. Se guardate la tabella a p. 35 considerandola dal punto di vista della difesa, però, il peggior risultato derivante dall'impiego di una difesa contro i passaggi (gli attaccanti hanno successo il 40% delle volte) è più vantaggioso del miglior risultato derivante dall'impiego di una difesa contro le corse (gli attaccanti hanno successo il 50% delle volte). Quindi i difensori adotteranno sempre una difesa contro i passaggi, basandosi sul criterio che il peggior risultato di tale strategia è valido almeno quanto il miglior risultato della difesa contro le corse. In realtà, non fa differenza utilizzare il primo o il secondo criterio per vedere se viene applicata una strategia pura, purché venga applicato a entrambe le parti.

Ancora football

Un'altra situazione che si ripete spesso nel football è quella del *first and ten*, primo down e dieci. Ancora una volta, gli attaccanti possono scegliere fra un'azione di corsa o di passaggio, e i difensori quale strategia usare. Qui però i payoff sono diversi: gli attaccanti cercano di massimizzare il numero medio di iarde guadagnate, e la squadra in difesa di minimizzarlo. La matrice dei payoff sarà la seguente:

STRATEGIA DI ATTACCO	STRATEGIA DI DIFESA	
	Difesa contro le corse	*Difesa contro i passaggi*
Azione di corsa	3	5
Azione di passaggio	8	4

Per la squadra in attacco, il peggior risultato di una corsa è 3, che è inferiore a 8, il miglior risultato del passaggio. Inoltre, il peggior risultato di un passaggio è 4, che è inferiore a 5, il miglior risultato di una corsa. Osservando la cosa dal punto di vista della difesa, il peggior risultato della difesa contro le corse è 8, che è inferiore a 4, il miglior risultato della difesa contro i passaggi. Per finire, il peggior risultato della difesa contro i passaggi è 5, che è inferiore a 3, il miglior risultato della difesa contro le corse. Neppure da un'analisi caso per caso emerge un vincitore chiaro. Secondo i ragionamenti fatti in precedenza, per nessuna delle due parti esiste una strategia pura da adottare.

C'è, in questa partita, anche un aspetto dinamico che differisce dalla situazione esaminata per il terzo down e sei. A prescindere da quale strategia ognuna delle squadre adotti, ciascuna di loro potrà sempre migliorare la propria situazione cambiando tattica, se l'altra resterà fedele alla propria. Ad esempio, se in attacco si sceglie di correre e la difesa si predispone contro un'azione di corsa (iarde medie guadagnate = 3), gli attaccanti possono migliorare la propria situazione decidendo di passare, mentre l'altra squadra applica ancora la difesa contro le corse (iarde medie guadagnate = 8). La squadra in attacco può migliorare la propria situazione quando i payoff sono 3 e 4, mentre quella in difesa può migliorarla quando sono 5 e 8. La stessa cosa succede con la morra cinese: a prescindere dalla strategia scelta da ognuno dei contendenti, uno dei due può sempre trarre vantaggio dal fatto che l'altro continui a giocare sempre nel modo scelto all'inizio.

Ci sono anche altre somiglianze fra questa partita e la morra cinese. Per riuscire ad adottare la strategia migliore, ognuna delle due parti dovrà presumere che l'altra sia una sorta di computer con una perfetta conoscenza della situazione, e scegliere una tattica che neutralizzi quella dell'avversario. Questo può essere fatto rendendo il payoff medio sul lungo periodo uguale contro ognuna delle strategie dell'avversario: ecco un altro caso in cui appare il valore atteso.

Sebbene un'analisi completa di questo tema richiederebbe una certa conoscenza dell'algebra, questo problema potrebbe essere affrontato da uno scolaro di terza media, nel Kansas del 1895, semplicemente con l'aritmetica[5]. Consideriamo la situazione dal punto di vista della squadra attaccante, cercando di capire, prima di tutto, in quale percentuale dovrebbe passare e in quale correre.

Se la squadra in attacco sceglie di correre sempre, e l'altra di applicare la difesa contro i passaggi, quest'ultima potrebbe migliorare il proprio risultato di 2 punti scegliendo la difesa contro le corse. Se invece gli attaccanti scelgono sempre i passaggi e i difensori avevano deciso la difesa contro le corse, questi ultimi possono migliorare il risultato di 4 punti scegliendo la difesa contro i passaggi. Perciò gli attaccanti dovrebbero correre il doppio delle volte rispetto a quelle in cui effettuano passaggi (in rapporto di 4 a 2). Per capire come questo "annulli" ogni strategia difensiva, supponiamo che gli attaccanti corrano due volte e passino una. Se gli avversari scelgono la difesa contro le corse, gli attaccanti guadagnano 3 iarde per due volte e 8 iarde una, per un totale di 14 iarde in 3 azioni, cioè una media di 4 e $^{2}/_{3}$ iarde per azione. Se i difensori scelgono la difesa contro i passaggi, gli attaccanti guadagnano 5 iarde due volte e 4 iarde una. La media sarà ancora la stessa. Quindi, 4 e $^{2}/_{3}$ iarde per azione sarà il valore di gioco, la media di iarde guadagnate in attacco a prescindere dall'azione della difesa. Naturalmente, come per la morra cinese, gli attaccanti vogliono impedire al calcolatore infallibile che è in difesa di guadagnare un vantaggio, quindi devono essere sicuri di correre il doppio delle volte che passano in base a un criterio casuale. Un modo per farlo è guardare la lancetta dei secondi sul proprio orologio prima di scegliere il gioco: se si trova fra 0 e 39, si opta per la corsa; altrimenti, per il passaggio. O potrebbero guardare il cronometro della partita. È un buon esercizio anche per l'allenatore, di cui alcuni avrebbero senz'altro bisogno.

Come giocare le partite 2 × 2

Dividiamo l'analisi in due tappe essenziali:

Prima tappa. Verifichiamo se una delle due parti segue una strategia pura. Questo può essere fatto mettendo a confronto le righe, per vedere se i numeri in una riga sono più alti dei numeri corrispondenti nell'altra. Se è così, la riga con i numeri più alti rappresenta la strategia pura che il Rosso (il giocatore orizzontale) adotterà. Se non avviene, confrontiamo le colonne per vedere se i numeri in una colonna sono più bassi di quelli corrispondenti nell'altra. Se le cose stanno così, la colonna con i numeri più bassi è la strategia pura che il Blu (il giocatore verticale) adotterà.

Se non c'è una strategia pura, passiamo alla seconda tappa. Torniamo indietro e guardiamo gli esempi nel paragrafo *Ancora football*.

STRATEGIA DI ATTACCO	STRATEGIA DI DIFESA	
	Difesa contro le corse	*Difesa contro i passaggi*
Azione di corsa	3	5
Azione di passaggio	8	4

Seconda tappa. Sottraiamo semplicemente il numero più basso dal più alto in ogni riga e mettiamo i risultati nell'*altra* riga. Poi li indicherò come "differenza dell'altra riga" (DAR). Ecco la tabella aggiornata:

STRATEGIA DI ATTACCO	STRATEGIA DI DIFESA		
	Difesa contro le corse	*Difesa contro i passaggi*	*DAR*
Azione di corsa	3	5	4
Azione di passaggio	8	4	2

La DAR dice che la squadra in attacco dovrebbe correre 4 volte e passare 2, in ordine casuale, naturalmente. È lo stesso rapporto che troviamo per un'azione di corsa ripetuta due volte e una di passaggio. Se i difensori adottano la difesa contro le corse, due azioni di corsa e un passaggio daranno in media $2 \times 3 + 8 = 14$ iarde, una media di $14/3 = 4\ ^{2}/_{3}$ iarde per azione. Se invece scelgono di difendersi dai passaggi, due azioni di corsa e un passaggio daranno in media $2 \times 5 + 4 = 14$ iarde, nuovamente con una media di 4 e ²/³ iarde per azione. Ricordate sempre di verificare prima l'esistenza di una strategia pura!

La teoria dei giochi 2×2 può essere applicata a un grande numero di situazioni della vita di tutti i giorni. Ne vedremo alcune nel presente capitolo e altri esempi in seguito.

L'importanza della puntualità

Ecco una situazione appartenente a un ambito totalmente differente. Avete dei biglietti per uno spettacolo e dovete passare a prendere una ragazza che vorreste diventasse la vostra fidanzata. È meglio essere puntuali o vestirsi in modo elegante e arrivare in ritardo?

Ovviamente, sarebbe fantastico se voi e la vostra – si spera – futura partner vi trovaste sulla stessa lunghezza d'onda. Il risultato migliore si avrebbe se foste tutti e due puntuali, perché in questo caso sareste sicuri di arrivare in tempo per l'inizio dello spettacolo. Non andrebbe altrettanto bene se tutti e due foste eleganti e in ritardo, ma almeno potreste farci su una bella risata, dato che nessuno di voi potrebbe prendersela con l'altro. Lo scenario che con più probabilità condurrebbe a un disastro sarebbe che voi foste in ritardo e lei puntuale. E non c'è bisogno che ve lo spieghi.

Mi sono imbattuto in questo tipo di situazione prima di imparare la teoria dei giochi, e dato che provengo dalla scuola che ritiene che la puntualità, come la pulizia, avvicinino al Signore, non ho mai esitato sulla decisione da prendere. Ero così famoso per arrivare sempre con cinque minuti di anticipo che quando gli amici mi invitavano a una festa mi comunicavano l'orario di inizio posticipandolo di mezz'ora. Devo ammettere che con il mio comportamento ho irritato alcune potenziali fidanzate; perfino mia moglie non è proprio entusiasta di questa mia ossessione per la puntualità. Avrei potuto forse fare di meglio (nel guadagnare punti con le mie potenziali conquiste, *non* nel trovarmi una compagna) se avessi saputo come questo problema viene affrontato dalla teoria dei giochi.

Considerando l'analisi che ho illustrato poco fa, e assegnando un punteggio massimo di 10 per il miglior risultato e di 0 per il peggiore, avrei potuto ottenere la tabella che segue:

IO	FIDANZATA POTENZIALE	
	Puntuale	*Elegante ma in ritardo*
Puntuale	10	2
Elegante ma in ritardo	0	6

Detto per inciso, c'è un'importante differenza fra questa ipotesi e il football (dal punto di vista della teoria dei giochi), perché una potenziale fidanzata non è un avversario che stia cercando di sconfiggervi. La teoria dei giochi non si applica solo a situazioni in cui un antagonista si oppone ai vostri interessi; è utile anche in situazioni come questa, in cui state cercando di determinare la migliore linea di condotta da seguire.

Si vede facilmente che nessuna delle due parti dovrebbe scegliere una strategia pura, è ora quindi di passare all'aritmetica. Ecco la tabella aggiornata:

IO	FIDANZATA POTENZIALE		
	Puntuale	*Elegante ma in ritardo*	DAR
Puntuale	10	2	6
Elegante ma in ritardo	0	6	8

La DAR mi dice di essere puntuale 6 volte ed elegante ma in ritardo 8, in un rapporto di 3 su 4. Ricordate, però, di calcolare la DAR solo in mancanza di una strategia pura.

Vediamo se funziona. Presumiamo di essere puntuali 3 volte su 7 ed elegante ma in ritardo le altre 4. Il numero totale di punti che accumulerete se la vostra fidanzata potenziale è sempre puntuale sarà $(3 \times 10) + (4 \times 0) = 30$, per una media di 4 e $^2/_7$. Il numero totale di punti che accumulerete se la vostra fidanzata potenziale è sempre elegante ma in ritardo sarà $(3 \times 2) + (4 \times 6) = 30$, sempre con una media di 4 e $^2/_7$. Perciò questa strategia neutralizza efficacemente la casualità del comportamento della vostra fidanzata potenziale: a lungo andare, ciò che fa lei non conta.

Sfortunatamente, ho saputo della teoria dei giochi *dopo* aver adottato la strategia della puntualità in ogni occasione. Non so come sarebbero andate le cose diversamente, ma so che avrei fatto irritare un minor numero di ragazze con le quali sono uscito, non facendo loro credere che dovevano per forza farsi trovare pronte perché io ero *sempre* puntuale.

Un carico prezioso

Un'applicazione interessante della teoria dei giochi si presentò durante la seconda guerra mondiale. Spesso era necessario trasportare oggetti o persone di grande valore (equipaggiamento segreto o un militare di alto grado) da un luogo a un altro, e il carico era considerato tanto prezioso che venivano inviati due aeroplani. La cosa o la persona importante veniva posta su quello di testa, così il velivolo che seguiva assicurava un fuoco di copertura se l'altro veniva attaccato (l'artiglieria montata sui caccia sparava in avanti). Dopo un po', il nemico capì che una formazione di due aerei generalmente significava la presenza di un carico prezioso sull'aeroplano di testa e concentrò i suoi attacchi su questo: il che portò a scegliere di affidare il carico all'aeroplano di retroguardia, per sviare il nemico. Dopo che alcuni aerei di testa vennero abbattuti e si scoprì che non contenevano nulla di prezioso, il nemico comprese la tattica e cominciò a mirare all'aero di coda, ottenendo così una maggiore percentuale di successi, dato che si trattava del velivolo più vulnerabile. Come era da attendersi, il carico prezioso venne allora nuovamente spostato nell'aeroplano di testa.

Supponiamo che il carico esca sempre illeso quando il nemico attacca l'aeroplano sbagliato; ha l'85% di possibilità di farcela se si trova in quello di testa e il nemico attacca; ma ha soltanto il 65% di possibilità di farcela se si trova in quello di coda e il nemico attacca. La matrice che ne risulta è la seguente:

CARICO	ATTACCHI NEMICI		
	Aereo in testa	*Aereo in coda*	DAR
Nell'aereo in testa	85	100	35
Nell'aereo in coda	100	65	15

Ho calcolato la DAR perché dalla descrizione precedente è chiaro che nessuna delle due parti adotta una strategia pura. Il carico dovrebbe essere piazzato nell'aereo in testa 35 volte su 50, o 7 su 10, e ne uscirebbe illeso $[(7 \times 85) + (3 \times 100)]/10 = 89,5\%$ delle volte.

Come potete vedere, i giochi 2×2 possono essere applicati a molte situazioni diverse[6]. Ne vedremo altre nel corso del libro.

[1] *Talent show* americano, simile al nostro *X-Factor*, che consiste in una competizione canora fra concorrenti scelti per mezzo di audizioni e selezioni effettuate da tre giudici e, solamente nelle fasi finali, dal pubblico, tramite televoto (*n.d.t.*).

[2] In inglese si fa riferimento all'espressione *true-blue*, letteralmente "vero blu", che vuol dire anche "conservatore" e che è riferita appunto agli americani in contrapposizione ai sovietici (*n.d.t.*).

[3] J. D. Williams, *The Compleat Strategyst*, McGraw-hill, new York 1954.

[4] Nel football americano i *down* sono i "tentativi di avanzare con la palla ovale"; la squadra ne ha a disposizione quattro ogni volta che si impossessa del pallone e può fare un solo passaggio in avanti (*n.d.t.*).

[5] Williams, *The Compleat Strategyst*, cit., p. 44. il libro spiega anche come gestire situazioni complesse in cui i giocatori possono scegliere fra più di due strategie.

[6] Cfr. www.gametheory.net/students.html. a chi conosce l'inglese, questo sito offre l'opportunità di esplorare alcune comuni applicazioni della teoria dei giochi; è suddiviso in aree dedicate agli insegnanti, agli studenti, ai professionisti e ai secchioni.

3
Come la matematica può migliorare la vita amorosa

Come riconoscere se lui o lei sono “quelli giusti”? • Chi invitare al ballo di diploma? • Perché le donne vengono considerate volubili e gli uomini affidabili?

È chiaro che il presente capitolo va preso in senso ironico... ma fino a un certo punto. Questo libro, su suggerimento del mio editor, doveva intitolarsi: *Come la matematica può aiutarci a rimorchiare*. Mi fa pensare a quella volta in cui dovevo preparare delle dispense per una classe di analisi funzionale all’UCLA e le intitolai: *Analisi funzionale, sesso e violenza. Parte I: analisi funzionale.*

Non c’è nulla di male in uno specchietto per le allodole... ma noterete che il titolo del libro *è* stato cambiato.

Sebbene alcune delle idee introdotte in questo capitolo *potrebbero* esservi d’aiuto per migliorare la vostra vita amorosa, devo ammettere in tutta onestà che la conoscenza della matematica tende, più che a attrarre, ad allontanare l’altro sesso. Questo mi è apparso così evidente in passato che negli anni Sessanta cominciai a raccontare alle ragazze con cui volevo uscire di essere un poeta errante (non mentivo, alcuni dei miei migliori tentativi sono disponibili sul mio sito), piuttosto che rivelare di essere un professore di matematica. Ci fu un’importante eccezione, però. Quando divenni tutor per i dottorandi del dipartimento di matematica, la prima persona a entrare nel mio ufficio fu Linda, una ragazza laureatasi da poco all’UCLA, con un ottimo curriculum e lettere di raccomandazione da parte di molti membri della facoltà che ben conoscevo. Io e Linda ci sposammo quattro anni dopo, perciò la matematica riuscì davvero a farmi raggiungere l’obiettivo suggerito nel titolo proposto dal mio editor. Ma dubito fortemente che molti lettori di questo libro diventeranno tutor in un dipartimento di matematica.

Come riconoscere se lui o lei sono “quelli giusti”?

Quando capita un colpo di fulmine, due persone sanno immediatamente di essere fatte l’una per l’altra. Credo però che sia un evento piuttosto raro. Ci si incontra, si esce, si passa del tempo insieme e un po’ alla volta sboccia l’amore. Ripensate al vostro primo partner o a qualcuno di quelli incontrati lungo il cammino, e forse vi porrete la domanda oggetto di questo paragrafo.

La ragione è che in fondo esiste l’angosciante sospetto che, gettando di nuovo nello stagno il pesciolino con cui state ora, potreste pescarne uno migliore: un partner più affine a voi, più attraente, più ricco... qualunque cosa desideriate. Si pone quindi il problema se esista o meno un modo di partecipare al gioco del corteggiamento che dia la migliore opportunità di trovare il vostro partner ideale.

Venni a sapere per la prima volta dell'esistenza di questa strategia grazie a Charles Brenner, che la propose in relazione a un noto problema di matematica, la cui soluzione esula dallo scopo di questo libro[1]. Supponiamo che ci sia un mazzo di carte poggiato su un tavolo; sulla faccia rivolta verso il basso di ogni carta è scritto un numero, che voi però non potete vedere. Sapete quante carte ci sono, ma non avete idea di quale sia il numero scritto su ciascuna di esse.

Il vostro obiettivo è scegliere la carta con il numero più alto. Il problema è che potete sceglierla solo mentre è nelle vostre mani; se la scartate per guardarne un'altra, non potrete più riprenderla. Una possibile strategia è considerare una certa percentuale delle carte disponibili come una sorta di campione di confronto e poi, non appena ne troviate una con un numero maggiore del più alto che c'è nel campione, la prendiate.

Il quesito matematico è: quanto dovrebbe essere ampio il campione per darvi la migliore probabilità di scegliere la carta con il numero più alto? Ovviamente se il vostro campione è formato solo dall'1% delle carte è inadeguato, e se è formato dal 99% delle carte, c'è una probabilità del 99% che la carta con il numero più alto appartenga al campione e che quindi non possiate più sceglierla.

Che legame ha tutto ciò con la scelta dell'anima gemella? Un potenziale candidato è come una di questa carte: quelli che soddisfano i vostri criteri sono simili alle carte con numeri molto alti, quelli che non lo fanno sono ovviamente le carte con i numeri bassi. Non sapete quanto possono essere alti quei numeri. Per gli uomini: potreste incontrare una donna con l'intelligenza di Marie Curie, la bellezza di Angelina Jolie e il conto in banca di Oprah Winfrey. L'unica cosa che sapete è quanto durerà all'incirca la finestra delle vostre chance di conquista: se oggi avete vent'anni, potreste continuare a suscitare interesse nelle ragazze fino ai quarantacinque o giù di lì, ma dopo è probabile che le vostre possibilità diminuiranno sensibilmente. La durata di questo periodo d'oro corrisponde al numero delle carte sul tavolo e il campione che costituisce il termine di paragone è dato dal lasso di tempo che vi concederete per sondare le varie possibilità prima di dire: «Appena incontrerò qualcuno più attraente di chiunque si trovi nel mio campione farò del mio meglio perché diventi mia moglie».

Naturalmente, l'analogia fra il problema delle carte e quello degli appuntamenti non è esatta, ma perché la matematica abbia un valore non deve essere perfetta: dev'essere utile. Per scoprire quanto tempo avete a disposizione per mettere insieme il campione, dovete moltiplicare la frazione $1/e$ (e = 2,71828..., la base dei logaritmi naturali) per la durata del vostro periodo d'oro. $1/e$ corrisponde approssimativamente al 37%. Perciò, se avete vent'anni e presumete che la vostra finestra sia fino ai quarantacinque, secondo questo calcolo avete a disposizione circa nove anni (il 37% di venticinque è 9,25). Quindi uscite con le ragazze senza impegnarvi fino ai ventinove anni, poi appena ne incontrerete una più attraente di quelle frequentate fino a quel momento, fatevi avanti.

Non sono sicuro che Charles abbia seguito la sua teoria; si è sposato per la prima (e unica) volta poco dopo i cinquanta. Naturalmente, ciò potrebbe essere in accordo con la sua strategia, se riteneva che il suo periodo d'oro sarebbe durato dai venti ai novanta anni.

È importante capire che tale tattica è concepita per massimizzare le vostre possibilità di sposare il miglior candidato disponibile che possiate mai incontrare. Se invece volete semplicemente massimizzare le vostre possibilità di accasarvi, ci sono infiniti modi per farlo, anche considerando che sposare un cittadino americano è un obiettivo assai ambito in molte parti del mondo.

Questa strategia può essere applicata anche ad altre circostanze in cui si può mettere insieme un campione, ma in cui si deve decidere se prendere o lasciare ogni volta che si aggiunge un nuovo elemento. Un esempio del genere è l'acquisto di una casa. Proprio come nelle storie d'amore, potreste entrare in un’abitazione e capire all’istante che è fatta per voi, ma ci sono buone probabilità che dobbiate accettarne una meno ideale. Un buon modo di procedere è concedervi un certo lasso di tempo per acquisire familiarità con il mercato, poi precipitarvi quando trovate una casa che vi sembra superiore a quelle già visitate.

Uno di quei giorni

Se siete un uomo, è quasi certo che vi succederà qualcosa di simile a quel che segue. State andando a casa e improvvisamente vi ricordate che si tratta di uno di quei giorni speciali: il compleanno di vostra moglie, il vostro anniversario di matrimonio, l’anniversario della prima volta che vi siete baciati. Qualunque cosa sia, vostra moglie considera questa ricorrenza di somma importanza. Sfortunatamente, non riuscite proprio a ricordare se oggi è uno di quei giorni oppure no.

Passate davanti a un fioraio e un mazzo di rose rosse vi chiama, invitante. Ma le rose rosse trasmettono un messaggio diverso, prima e dopo il matrimonio. Prima, vogliono dire: «Ti amo». Dopo possono dire: «Ti amo», oppure: «Ho combinato un macello, perdonami, ti prego». Se portate a casa un mazzo di rose rosse ed è uno di quei giorni speciali, probabilmente verrete salutati dalla frase: «Caro, te ne sei ricordato!», o qualcosa di simile, e potrete guadagnare tempo nell’attesa di scoprire esattamente di quale giorno si tratti. D’altra parte, se *non* è uno di essi, c’è una ragionevole probabilità che vostra moglie dedicherà il resto della serata a cercare di scoprire quale macello avete combinato. Potete stare certi che quasi sicuramente non crederà a nessuna spiegazione le darete in merito al giorno speciale che pensavate fosse.

Il vostro primo pensiero potrebbe essere: ci sono 365 giorni all’anno e solo pochi sono speciali, quindi è molto improbabile che oggi sia uno di quelli. Ma il fatto che l’abbiate pensato fa aumentare considerevolmente le probabilità che lo sia. Senza un palmare o qualche altra risorsa su cui fare affidamento, dovrete contare sulla teoria dei giochi.

Ovviamente, otterrete il punteggio massimo se oggi è un giorno speciale e porterete a casa le rose. Sarà un disastro se è un giorno speciale e ve ne dimenticherete, un po’ meno se non è un giorno speciale e vi presentate con le rose. E sarà solo un giorno come tanti se davvero è un giorno qualunque e non le porterete delle rose. Questo ci conduce alla tabella seguente:

PORTARE ROSE?	GIORNO SPECIALE?		
	Sì	*No*	*DAR*
Sì	10	–4	10
No	–10	0	14

Naturalmente bisogna sempre controllare se si può applicare una strategia pura, ma non è così, e quindi ho incluso la DAR. La quotazione sarà 7 a 5 a sfavore delle rose, e il gioco ha una speranza negativa di –1 e $^2/_3$. Non ve lo aspettavate? Eppure, già il fatto di avere un dubbio costituiva uno svantaggio.

Il ballo del diploma

Se state insieme a qualcuno (o in qualunque modo si dica adesso), il ballo del diploma non rappresenta un problema, se non per il fatto di cosa mettersi (se siete una ragazza) e di che tipo di mezzo di trasporto usare (se siete un ragazzo). Se invece non state insieme a nessuno, avrete il problema di scegliere la ragazza da invitare (se siete un ragazzo) o di cosa fare se venite invitate dal ragazzo sbagliato (se siete una ragazza). Fortunatamente, la matematica può aiutarvi in entrambi i casi.

Consideriamo prima la situazione dal punto di vista di un ragazzo. Potete scegliere tra due compagne di scuola da invitare, che chiamerò "prima classificata" e "ripiego". La prima classificata è molto richiesta, e il ripiego è una buona alternativa; dovete però decidere quale delle due invitare per prima. Ovviamente, preferireste invitare la prima classificata e che lei accettasse, ma se vi rifiuta non solo sarete davvero tristi, ma qualcun altro potrebbe già essersi accaparrato il ripiego e voi potreste rimanervene in disparte. Se invitate prima il ripiego, c'è una ragionevole possibilità che accetti, e se non lo fa, non sarà così grave perché ancora vi resterà una possibilità con la prima classificata, che ha fama di essere molto esigente. Dopo aver valutato tutto ciò, create la matrice che segue.

PRIMA RAGAZZA INVITATA	PRIMA RAGAZZA INVITATA ACCETTA?	
	Sì	*No*
Prima classificata	10	0
Ripiego	6	4

Incredibilmente, quando si considera la situazione dal punto di vista della teoria dei giochi, esiste una strategia pura che si applica alla prima ragazza che inviterete: dovrete inizialmente invitare il ripiego. Qui arriva la parte interessante, però: di solito questa ragazza sa bene di essere la seconda scelta e spesso accetterà, pensando che quell'invito sia la sua migliore opportunità. Ciò potrebbe spiegare una delle considerazioni più difficili da capire: le più belle della scuola non sempre partecipano al ballo di diploma!

Diamo ora un'occhiata all'altra faccia del problema. La prima classificata deve decidere se accettare o meno l'invito di un ragazzo abbastanza attraente. Dopotutto, c'è sempre la possibilità che l'erba del vicino sia sempre più verde, e lei potrebbe ricevere un'offerta migliore. Eppure, se rifiuta l'invito, potrebbe essere lei a ritrovarsi in disparte, e allora *sì* che le malelingue avrebbero di che parlare!

ACCETTARE L'INVITO?	ESISTE UN'OFFERTA MIGLIORE?		
	Sì	*No*	*DAR*
Sì	5	8	10
No	10	0	3

Qui infine c'è la spiegazione matematica del perché gli uomini siano più affidabili e prevedibili delle donne. Come abbiamo visto, i ragazzi, nell'invitare le compagne al ballo di diploma, seguono una strategia pura, mentre le ragazze dovrebbero preferire una strategia mista. Sebbene le cifre possano cambiare, a seconda dei valori relativi che una ragazza attribuisce al fatto di essere invitata o rimanere a casa, ciò potrà solo modificare la frequenza relativa con cui l'invito viene accettato.

Il valore atteso degli incontri su Internet

Ricordo di aver visto un episodio della bella serie televisiva *Connections* scritta da James Burke[2], in cui si affermava che uno dei grandi vantaggi del trasporto ferroviario era stato un aumento nella varietà genetica della specie umana. Certo, da tempi immemorabili soldati e avventurieri hanno sposato donne geograficamente irraggiungibili per la maggior parte dei loro simili, ma il treno ha reso possibile a tutti allargare il cerchio delle potenziali compagne ben al di là del proprio paese natio.

Con il passare del tempo, la facilità di viaggiare si è unita a quella degli incontri su Internet, aumentando non solo la varietà genetica, ma rendendo molto più semplice per un individuo avere un'ampia scelta di partner potenziali. Nonostante gli eventuali pericoli degli incontri virtuali, andrei matto per questa innovazione se fossi single. In realtà, ho sperimentato gli incontri virtuali nella loro forma primitiva negli anni Sessanta, e non andò poi così male. Dal punto di vista del valore atteso, hanno un successo enorme. In qualche caso, nella fase iniziale non c'è nessuna spesa, dato che molte società permettono di fare un test della personalità e mostrano in anteprima i partner potenziali. Non vedo una ragione per la quale un single non dovrebbe approfittarne. Qualunque sia la probabilità di successo, in caso di riuscita la ricompensa è alta; e in caso di fallimento, il rischio è ridotto. Pensate alla frase: «È meglio avere amato e perso che non avere amato mai», e andrete a fare quel test non appena avrete chiuso questo libro.

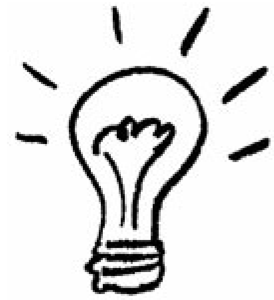
Questione di percentuali

Al nostro primo appuntamento, io e Linda andammo in un ristorante thailandese. Mentre mangiavamo allegramente spaghetti di riso fritti, le chiesi cosa occorresse, secondo lei, per far funzionare una relazione. Senza esitare, mi rispose che in una coppia dovevano esserci il 70% di cose in comune e il 30% di differenze.

La sua risposta mi piacque moltissimo. Prima di tutto, vado matto per le percentuali (come ormai saprete), quindi il solo fatto che formulasse la risposta in questi termini la rese attraente ai miei occhi. Inoltre, aveva azzeccato le cifre: a me piacciono le cose familiari, ma sono anche abbastanza aperto alle nuove esperienze.

All'inizio, credevo che il rapporto 70-30 andasse bene per tutti, ma a questo proposito mi sono ricreduto. Tale proporzione è la misura di quanto amate le abitudini rispetto alle novità. Per tradurre quanto detto in termini culinari, il rapporto 70-30 che mi piace così tanto sarebbe troppo avventuroso per qualcuno che consideri esotico il cuscus e troppo tradizionalista per chi desideri provare un ristorante *Asian fusion* e assaggiare piatti a base di insetti.

Credo che possa essere utile capire quale sia la proporzione che funziona meglio per voi, perché non credo che due persone con vedute radicalmente diverse in questo campo possano essere felici insieme. Ho dato uno sguardo a Eharmony.com, una fra le agenzie di incontri più importanti nel web, che considera ventinove parametri di compatibilità. Nessuno di questi sembra quantificare il rapporto tra ciò che si ha in comune rispetto a ciò che si ha di diverso. Certo, non metterei tale dato in cima alla lista di quanto serve nella scelta di un compagno (tutti i parametri di compatibilità ovvi sono molto più importanti), ma credo che con il passare del tempo possa rappresentare una fonte potenziale di attrito. Influenzerà le scelte in molti ambiti: cibo, hobby, mete di vacanza. Queste cose potranno non essere importanti nell'entusiasmo iniziale di un nuovo incontro, ma lo diventeranno in seguito.



[1] MathProblems.info, Problema numero 26: http://mathproblems.info/group2.html.

[2] Si tratta di una serie televisiva che mostra come molti eventi storici e molte scoperte scientifiche si siano sviluppati attraverso una catena di interconnessioni. La serie è basata sul libro, altrettanto bello, di Burke intitolato sempre *Connections,* Little, Brown and Company, Boston 1995.

4
Come la matematica può aiutarvi a battere i bookmaker

Perché il biglietto della lotteria dovrebbe contenere numeri più alti di 31 • Si può smentire un valore atteso negativo? • Quando bluffare e quando passare la mano

Il gioco d’azzardo rappresenta un passatempo molto emozionante per un gran numero di persone e, se praticato con moderazione, è più conveniente di molte altre forme di svago. Quanto costa, ad esempio, andare al cinema a vedere un film appena uscito e comprare i popcorn? Nel momento in cui scrivo, a Los Angeles per tutto questo si paga 14 dollari a persona (ai tempi in cui ero ragazzino e vivevo nei sobborghi di Chicago, il sabato si poteva assistere a una matinée comprendente un cartone animato e un cinegiornale, più i popcorn, per soli 35 cent... e i film erano molto meglio di quelli di oggi).

Perciò, se scommettete sulle partite a caso e puntate un totale di 300 dollari, ogni match dovrebbe costarvi 13,62 dollari. Il prezzo è praticamente lo stesso e, per quanto mi riguarda, il gioco è molto più divertente dell’ultimo film iper-pubblicizzato, pieno di effetti speciali creati al computer e con personaggi e dialoghi inconsistenti. Naturalmente, è questione di gusti, ma se scommetto 20 dollari a partita su quindici incontri di football, posso ricavare dai miei risparmi più di quaranta ore trascorse a fare il tifo in emozionante attesa.

Questo capitolo forse non vi trasformerà in un vincitore, ma certamente vi farà perdere di meno. Vorrei aiutarvi a trarre il massimo divertimento possibile dalle scommesse, e il miglior modo per farlo è spiegare come puntare in modo intelligente.

Considerate il gioco un passatempo e stabilite un limite ragionevole per la somma che siete pronti a perdere ogni mese. Raggiunto quel limite, *smettete di giocare per il resto del mese*. Oppure fatelo su base settimanale, se non riuscite a sopportare il pensiero di raggiungere il limite il dieci del mese e dover passare in “ozio” le settimane successive.

I tre tipi di giochi

Per come la vedo io, esistono tre tipi di giochi su cui scommettere:

- quelli in cui le probabilità sono a vostro sfavore;
- quelli di abilità;
- quelli in cui smentire una speranza matematica in apparenza negativa.

I giochi dove le probabilità sono a vostro sfavore

In questo primo tipo, a lungo andare siete destinati a perdere. Rientrano in questa categoria gran parte dei giochi abituali dei casinò come i dadi, la roulette, la slot machine e il *keno*[1]. In tali casi, esiste una speranza negativa che nessuna strategia, tranne barare, può smentire sul lungo periodo. Ne abbiamo visto un esempio nel capitolo 1, quando abbiamo esaminato il valore atteso (o speranza, o speranza matematica) di una puntata sul rosso nella roulette americana. Situazioni del genere esistono per tutti i giochi dei casinò; il payoff e le probabilità di vincita sono congegnati in modo da far sì che le puntate abbiano una speranza negativa. Un tempo esisteva un'eccezione: il blackjack. Tenendo a mente le carte, è possibile determinare quando la speranza del giocatore diventa positiva, e in situazioni simili si può puntare di più. I casinò però lo sanno, e si servono di mescolatori automatici che annullano tale vantaggio, oppure vi viene chiesto educatamente di andarvene se capiscono dal vostro metodo di gioco che state contando proficuamente le carte.

Le lotterie statali sono diverse, perché è possibile giocare in modo consapevole. Naturalmente, bisogna calcolare la speranza matematica di un biglietto. Se state giocando a una specifica lotteria, di solito potete trovare indicato il numero dei possibili biglietti da comprare che abbiano ognuno una differente combinazione. Esso viene ricavato attraverso tecniche che sono quelle del cosiddetto "calcolo combinatorio": ad esempio, un biglietto della lotteria nel quale si possono scegliere sei numeri da 1 fino a 51 è chiamato combinazione semplice di lunghezza 6 di 51 elementi. Il numero di tali biglietti, cioè di tali combinazioni, viene indicato con C(51,6) ed è calcolato per mezzo della formula n!/k! (n-k)! dove *n* è il numero degli elementi, nel nostro caso 51, e *k* è la lunghezza della combinazione, nel nostro caso 6. Il punto esclamativo dopo un numero indica il "fattoriale" di quel numero e cioè il numero moltiplicato per tutti i numeri naturali che lo precedono. Il numero dei biglietti con tutte le possibili combinazioni C(51,6) sarà quindi:

$$C(51,6) = (51 \times 50 \times 29 \times 48 \times 47 \times 46)/$$
$$(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 18.009.640$$

In molti Stati, un jackpot di 10.000.000 dollari viene pagato nel corso di diversi anni. Per compensare il fatto che l'inflazione diminuisce il valore dei versamenti fatti dopo un certo tempo, moltiplicate il numero dei possibili biglietti per 2,5 (la matematica che c'è dietro questo calcolo verrà spiegata nel dettaglio al capitolo 8). Poi prendete in considerazione il vostro scaglione d'imposta: la vostra vincita vi porterà sicuramente nella fascia più alta, che supponiamo sia del 50%. Per compensare la quota delle vincite che vi verrà spietatamente strappata dall'Agenzia delle entrate, moltiplicate per 2 il risultato ottenuto in precedenza moltiplicando per 2,5. Se il jackpot è più alto di tale cifra, comprate un biglietto. Di solito avrete speranza positiva (ma non crediate che vi porti subito i soldi in banca: la speranza positiva su un evento che si verifica una volta su cinquanta milioni è piuttosto diversa da quella su uno che capita una volta su tre).

Sarebbe inoltre terribile se vinceste il jackpot solo per accorgervi che dovrete spartire il montepremi con altri vincitori. Be', non sarebbe *davvero* terribile – avreste sempre vinto la lotteria – ma sarebbe meglio se l'unica persona con cui dividere la vostra fortuna fosse lo Zio Sam. Allo scopo di minimizzare la possibilità di dover spartire con altri vincitori, sappiate che molte persone scelgono i propri biglietti in base a numeri fortunati: il giorno del matrimonio, la data di nascita del primo figlio, e così via. Per evitare di dover spartire le vostre fortune con loro, cercate numeri più alti di 31 nel vostro biglietto.

Giochi di abilità

Un gioco di abilità è quello in cui chi è bravo ha una speranza matematica positiva. È possibile giocare e vincere a blackjack in un casinò (anche se, come già detto, bisogna essere *molto* bravi e farlo in quelli che non utilizzano i mescolatori automatici) ed è possibile vincere a certi altri giochi, come poker e backgammon, grazie alla bravura. Molta gente scommette sulle partite di golf, che rientrano anch'esse in tale categoria. Quando ero più giovane, ero un giocatore d'azzardo di discreto successo; mi limitavo però al poker, al backgammon e a contare le carte al blackjack, perché sentivo che la mia abilità nel calcolare probabilità e valori attesi mi avrebbe permesso di vincere. Il più delle volte andava proprio così, non perché io fossi incredibilmente bravo, ma perché la maggior parte delle persone con cui giocavo era peggio di me.

Scoprii anche che era molto più semplice vincere a backgammon che a poker, per molte ragioni. Una è che il backgammon è un gioco in cui la psicologia conta poco, mentre tutti sanno che nel poker ha invece grande importanza, sia per bluffare che per intuire cosa farà il vostro avversario. Cosa ancora più importante, però, è che a backgammon vince chi prende decisioni migliori di quelle dell'avversario.

Durante una serata a poker, potrà capitarvi di fare cinque o sei scelte cruciali che determineranno se vincerete o perderete. Generalmente, queste decisioni fondamentali arrivano quando avete una buona mano, ce l'ha anche qualcun altro e viene puntata una somma spropositata rispetto a quelle di routine. Su questo argomento sono stati scritti interi libri, ma i segreti più preziosi si imparano solo attraverso l'esperienza. E chi ha imparato di più sono spesso i vincitori dei tornei di poker multimilionari.

Se invece si gioca a backgammon per lo stesso numero di ore, probabilmente si è costretti a prendere centinaia di decisioni; e il risultato della serata dipenderà soprattutto dalla capacità di scegliere sempre meglio dell'avversario. Un bravo giocatore di backgammon vincerà contro un avversario debole molto più spesso di quanto non farebbe uno di poker. Inoltre, nel backgammon l'importanza della psicologia (un campo in cui me la cavo male) non si avvicina nemmeno lontanamente a quella che ha nel poker. Un anno in cui non riuscii a trovare lavoro come insegnante di matematica mi mantenni con il backgammon, e spesso i miei avversari facevano mosse così maldestre che per me era come tirare un sasso e vedere gli altri scommettere che sarebbe caduto verso l'alto.

I giochi nei quali è possibile smentire un valore atteso apparentemente negativo

Ci sono alcuni giochi nei quali teoricamente il valore atteso è in apparenza negativo, ma può essere smentito. Molte delle scommesse sportive sono di questo genere. La grande maggioranza degli scommettitori perde, ma c'è una piccola minoranza che vince, e parecchio. Ne ho conosciuti alcuni di grande successo e molti di loro applicavano una propria strategia alle scommesse, cui seguiva l'autodisciplina. Certo, il Super Bowl è l'evento sportivo più importante dell'anno, ma se non si ha con certezza un favorito, non bisogna sentirsi obbligati a scommettere.

Non posso promettere di fare di voi dei vincitori. Ma posso promettere di farvi perdere di meno e vi mostrerò cosa *può* farvi vincere. Sarà questo, in poche parole, l'argomento del presente capitolo.

Come calcolare la percentuale del casinò

I bookmaker di quartiere che esistevano quando ero giovane sono stati in gran parte rimpiazzati da casinò impersonali situati da qualche parte nel cyberspazio, eppure le scommesse rimangono suppergiù le stesse. Per cominciare a perdere di meno, dovete capire su cosa state cercando di avere la meglio, e questo significa essere capaci di calcolare la percentuale del bookmaker, o del casinò, su una scommessa. Quella del bookmaker è simile alla percentuale attesa, ma ha un significato leggermente diverso, perché non è possibile conoscere la probabilità con cui un dato evento si verificherà. Si può calcolare la probabilità esatta di realizzare un blackjack o di ottenere un 7 a *craps*[2], ma non quella che i Dallas Cowboys vincano contro i New York Giants domenica prossima.

Cominciamo con una scommessa semplicissima, quella chiamata "11–10 *pick'em*", che costituisce il pilastro dell'industria statunitense dell'azzardo. È la classica scommessa con handicap[3]. Se vedete una partita quotata "Dallas –3 contro i Giants", vuol dire che dovrete scommettere 11 dollari per vincerne 10, e che, per vincere puntando sui Dallas, il loro punteggio dovrà superare quello degli avversari di oltre 3 punti (che costituiscono appunto l'handicap). Se invece scommettete sui Giants, vincerete se, aggiungendo 3 al loro punteggio, il risultato supererà quello dei Dallas. Se i Dallas sconfiggono i Giants con una differenza di 3 punti esatti, la scommessa è pari e i soldi non cambiano di mano.

La scommessa 11–10, in cui chi perde pagherà 11, ha costituito lo standard dell'industria del gioco d'azzardo per molti anni. Ovviamente, la procedura deve essere congegnata in modo che chi dà la possibilità di scommettere abbia una speranza positiva, come per le assicurazioni, dato che sta affrontando un rischio molto alto, mentre chi gioca rischia solo la somma che può perdere. Inoltre l'agenzia che organizza le scommesse sta offrendo un servizio per il quale bisogna pagare. Il rapporto di 11 a 10 è un'ottima scelta, perché porta via i soldi lentamente a chi perde, lasciandogli l'illusione che se il goal dell'ultimo minuto non fosse andato a segno, quel giorno avrebbe vinto. Quindi tornerà a scommettere, di solito per perdere di nuovo.

Per calcolare la percentuale del banco, in questo caso, vediamo quanto dovreste puntare per farvi restituire 100 dollari dal bookmaker. Come abbiamo visto, bisogna puntare 11 dollari per vincerne 10; quindi, in caso di successo, con un investimento di 11 dollari ne riceverete 21: i vostri 11 più i 10 della vincita. Se volete ottenere 100 dollari dopo una puntata vincente, considerando che 100/21 = 4,762, dovreste puntare 4,762 × \$11 = \$52,38. Se scommetteste 52,38 dollari sia sui Giants che sui Dallas, perdereste una puntata e ricevereste \$100 dal bookmaker. Poiché 2 × \$52,38 = \$104,76, per ottenere \$100 dovrete puntarne \$104,76. Quindi perdereste 4,76 dollari su una puntata di 104,76, ossia il 4,54% dell'ammontare della vostra puntata. Questa è la percentuale del casinò[4]. Se viene puntata la stessa somma di denaro sui Giants e sui Dallas, al bookmaker andrà il 4,54% dell'ammontare dell'intera cifra.

Infatti è proprio questo l'obiettivo dell'handicap: non rappresenta la stima di ciò che accadrà, ma piuttosto quella del bookmaker per attrarre puntate di equivalente ammontare su entrambe le parti. In questo modo, è sicuro di vincere. Se la maggior parte dei soldi fossero puntati sui Dallas, e questi vincessero, il bookmaker correrebbe un serio rischio. Anche se, in teoria, la percentuale del casinò dovrebbe assicurare comunque una vincita nel lungo periodo, il bookmaker preferisce assicurarsela in tempi brevi. Chi non lo farebbe?

L'handicap esiste anche per le partite di basket («gli Spurs a +5 contro i Bulls»), mentre il cosiddetto *over-under*[5] esiste in tutti gli sport. La speranza è la stessa, –4,54%, nel senso che bisogna scommettere 11 dollari per vincerne 10. Tuttavia, proprio come al supermercato, si può andare alla ricerca delle offerte più convenienti anche nei casinò del cyberspazio. Troverete spesso diversi siti on-line che vi offrono occasioni di 21 a 20, e se fate di nuovo il calcolo di prima, scoprirete che vi basterà scommettere 102,44 dollari per vincerne 100. Questo vuol dire che perderete 2,44 dollari su una puntata di 102,44, cioè il 2,38% della somma scommessa. Molto meglio di qualsiasi puntata in un casinò di Las Vegas o Atlantic City.

Uno sviluppo relativamente recente è il *betting exchange*[6]. Betfair è l'azienda leader del settore. Un *betting exchange* permette al pubblico di stabilire le quote. Se il casinò ha fissato l'handicap sulla partita Patriots-Cowboys dando i Patriots a –3, e voi invece volete scommettere sui Cowboys con 4 punti di vantaggio, potete inoltrare una richiesta al *betting exchange* perché accetti la vostra quota, così come potreste voler comprare delle azioni a un prezzo inferiore a quello correntemente sul mercato. La vostra proposta potrebbe venire rifiutata, così come potrebbe accadere per le azioni. Al *betting exchange* andrà una percentuale della vostra vincita (i buoni clienti ottengono condizioni più vantaggiose), ma nel complesso potete ottenere condizioni più convenienti di quelle dei casinò on-line.

Oltre alla tipologia di scommesse che abbiamo visto, ne esistono altre tre molto comuni. Le esaminerò in separata sede perché il calcolo della percentuale del banco è leggermente diverso per ciascuna di esse, anche se l'idea di fondo è simile.

Le scommesse con la quota

L'esempio più comune delle scommesse con la quota è quello sulle corse dei cavalli, dove potete puntare sul cavallo numero 5 che viene dato 7 a 2: vuol dire che guadagnate 7 dollari ogni 2 di puntata se il cavallo vince la gara. Una variante si trova nel football o nel baseball. All'inizio della stagione, vengono pubblicati i pronostici su tutte le squadre riguardo alla loro possibile vittoria nel Super Bowl. Ci sono anche delle varianti di questo tipo di scommessa: ad esempio, un bookmaker che offre pronostici sulla vittoria dei San Diego Charger sulla AFC West, la *division* occidentale della lega del football.

Per illustrare l'idea, lasciatemi inventare un'immaginaria tabella delle quote per la AFC West.

SQUADRA	PRONOSTICI
Kansas City	4-1
Denver	1-1
Oakland	3-1
San Diego	3-2
Seattle	9-1

Vediamo quanto dovreste puntare su ogni squadra per ottenere 100 dollari. Una puntata di 20 dollari sulla squadra di Kansas City, che viene data 4 a 1, ne farebbe vincere 80; vi vedreste consegnare 100 dollari (i 20 della puntata più gli 80 della vincita) se i Kansas City conquistassero la AFC West. Facendo un ragionamento simile, dovreste puntare 50 dollari sulla squadra di Denver, 25 su quella di Oakland, 40 su quella di San Diego, e 10 su quella di Seattle, per un totale di $20 + $50 + $25 + $40 + $10 = $145.

Se faceste tutte queste puntate contemporaneamente, scommettereste un totale di 145 dollari e, a prescindere da chi fosse il vincitore, riscuotereste 100 dollari. Se ne puntaste 100, vincereste 100/145 × $100, ossia 68,97 dollari. Perciò, per ogni puntata da 100 dollari, ne perdereste $100 – $68,97 = $31,03; quindi, la percentuale del banco è di –31,03%. Brrr!

Bisogna essere davvero masochisti per scommettere dei soldi con una speranza del –31%, specialmente quando ci sono in abbondanza scommesse disponibili al –4,54%. La brutta notizia è che per le corse di cavalli le percentuali del banco oscillano intorno al –20%, e normalmente per scommettere a inizio stagione su chi vincerà il Super Bowl viene richiesta una percentuale anche meno conveniente.

Esiste una formula per calcolare la speranza a partire dalle quote, ma perché preoccuparsene? (una delle mie frasi tipiche come insegnante è proprio: «Esiste una formula, ma perché preoccuparsene?»). Se capite il concetto-base, potrete sempre arrivarci da soli.

Aspetto speranzoso il giorno in cui vedrò delle quote come queste:

SQUADRA	QUOTE
Denver	4-1
Kansas City	4-1
Oakland	3-1
San Diego	4-1
Seattle	9-1

Per riscuotere100 dollari, puntatene 20 sulle squadre di Denver, Kansas City, e San Diego; 25 su quella di Oakland e 10 su Seattle, per un totale di 95 dollari. Ma assicuratevi che sarete pagati in caso di vincita, perché generalmente un bookmaker che offre quote del genere ha già in tasca un biglietto di sola andata per Rio de Janeiro.

Scommettere con le quote sul baseball

La maggior parte delle scommesse sul baseball vengono fatte con le quote. Se i Giants giocano contro i Dodgers a Los Angeles, la quota potrebbe essere espressa come «Dodgers $1,30 – $1,50». Questo vuol dire che se volete scommettere sui Dodgers (favoriti), dovete puntare 1,50 dollari per vincerne uno; e se volete scommettere sui Giants, dovete puntare un dollaro per vincerne 1,30. Per calcolare la speranza matematica, facciamo la stessa cosa che abbiamo visto per le corse dei cavalli o per le scommesse sulla squadra vincente nell'AFC West. Per riscuotere 100 dollari puntando sui Dodgers, dovremo mettere sul piatto 60 dollari: ne riscuoteremo 100 ricevendo i 60 scommessi più i 40 di vincita. Allo stesso modo, per riscuotere 100 dollari puntando sui Giants, dovremo metterne 43,48. Quindi se punteremo \$60 + \$43,48 = \$103,48, ne riscuoteremo 100 a prescindere da chi sarà il vincitore. In alternativa, potremmo scommetterne 100 dollari e ricavarne 96,64, perciò la percentuale del banco è del 3,36%.

C'è bisogno di dire che si tratta di una percentuale di gran lunga preferibile a quella attesa del –31%?

Parlay

Molti bookmaker vi offriranno l'accordo che segue, conosciuto come *parlay*[7]. Scommettete su due partite qualsiasi che hanno la quota a sfavore. Se vincete su *entrambe*, otterrete 13 dollari per ogni 5 puntati, altrimenti perdete 5 dollari.

Non possiamo calcolare la percentuale del banco in un *parlay*, perché il bookmaker non ci lascerà arrivare all'altro estremo della scommessa, cioè perdere solo se perdessimo su entrambe le partite. Quello che possiamo fare è scegliere tirando una moneta. Ci sono quattro risultati possibili per due lanci e ognuno è ugualmente probabile: testa-testa, testa-croce, croce-testa, e croce-croce. Solo una di queste combinazioni si rivelerà per noi vincente, quindi, se giocassimo quattro volte, avremmo puntato 4 × \$5 = \$20 e finiremmo con il perdere 2 dollari (vinceremmo \$13 una volta e ne perderemmo 5 in tre casi). Questa è una percentuale attesa del –10%. Se consideriamo che normalmente è del –4,54% vediamo che una scommessa *parlay* non è così svantaggiosa come quelle nelle corse dei cavalli, ma è pur sempre una cattiva scelta.

Teaser

Sui *teaser* esistono tutta una serie di varianti, ma sostanzialmente funzionano così: la prima partita della University of Southern California per il 2008 è in programma il 30 agosto contro la Virginia, e la USC è favorita per 20 punti. Supponiamo che vi venga offerto un *teaser* di sei punti su una quota di 2 a 1. Il bookmaker vi concederà di prendere 6 punti extra: se scommettete sulla USC, dovrete cedere 14 punti (piuttosto che 20), e se punterete sulla Virginia, ne riceverete 26 (invece di 20). Invece di scommettere 11 a 10 su una combinazione perdente, tuttavia, come fate in una con l'handicap, dovrete scommettere 2 a 1.

In generale, è ragionevole presumere che una scommessa con handicap abbia il 50% di probabilità di successo, ma non possiamo stimare quelle di un *teaser* senza conoscere la distribuzione di una specifica variabile casuale: quella dei risultati reali rispetto all'handicap. Se si è trattato di un handicap talmente accurato che il 40% delle partite si è concluso con una differenza minore di 6 punti rispetto a esso, vincereste entrambe le puntate se la USC totalizzasse fra 14 e 26 punti, e solo una in caso contrario. Se lo faceste per cinque partite, scommettendo una *unit*[8] su ogni squadra, ne vincereste due per due volte e ne perdereste una per tre volte, con un ottimo risultato.

Per calcolare la vostra speranza con accuratezza, dovreste conoscere la distribuzione dell'esito delle partite rispetto all'handicap. Io non saprei dirvi quant'è, ma gli scommettitori esperti che conosco mi hanno spiegato che i *teaser* sono una fregatura, e io gli credo. Per inciso: la definizione di fregatura è quella di una puntata con un'alta percentuale di vincita del banco.

Si può vincere con le scommesse sportive?

La risposta a questa domanda è un fondatissimo sì. La prima cosa da fare è evitare le fregature: quelle cioè su cui esiste un'alta percentuale di vittoria del banco. Credo che una buona regola pratica sia di non fare nessuna puntata con una percentuale del banco maggiore del 5%, e gran parte dei giocatori di professione sarebbero d'accordo con me (anche se ce ne sono alcuni che riescono a vincere somme cospicue nonostante una percentuale del banco vicina al 20%). Ricordate che l'handicap è sostanzialmente una stima di quello che pensa il pubblico. Se l'handicap è calcolato accuratamente, riuscirà ad attrarre metà delle scommesse su ognuna delle parti; quando si scommette contro l'handicap si contrappongono le proprie convinzioni a quelle della maggioranza e il bookmaker si limita a fare da intermediario per permettervi di farlo. Quindi, se saprete valutare con esattezza la probabilità che una squadra smentisca l'handicap, meglio di quanto sa fare il pubblico, vincerete le vostre scommesse.

Mediare l'handicap: un modo possibile di vincere

Arbitraggio è un termine stravagante utilizzato per definire un'operazione che consiste nell'acquistare un bene a un prezzo inferiore di quello a cui lo si rivende, ed è da sempre un modo per fare soldi. Se l'oro è quotato sulla Borsa di Londra $950 all'oncia e su quella di New York $940, un arbitraggista acquisterà un contratto sull'oro a New York a $940 e lo rivenderà a Londra per $950, guadagnando la differenza di $10. Nell'era di internet, operazioni del genere sono diventate più difficili di quanto non lo fossero una o due generazioni fa, perché le differenze di costo possono essere viste da un gran numero di persone e perciò scompaiono in fretta, ma il concetto resta questo.

L'analogia con gli sport sta nel trovare vari bookmaker che offrono handicap diversi per le stesse partite. Supponiamo che BestBet dia i Patriots come favoriti per 3 punti rispetto ai Cowboys, mentre WagerWorld li dia favoriti a 3 e ½. Supponiamo per un momento che la quota sull'handicap sia il normale 11–10. Se si scomettono $100 sui Cowboys con WagerWorld e altrettanti sui Patriots con BestBet, qualora la partita finisca con qualsiasi altro punteggio che non sia una vittoria dei secondi per 3 punti, vinceremo una scommessa e ne perderemo un'altra. Guadagneremo $100 sulla puntata vincente e ne perderemo $110 sull'altra, per una perdita netta di $10.

Supponiamo, però, che il punteggio finale sia: Patriots 17, Cowboys 14. Con WagerWorld vinceremo $100, ma con BestBet pareggeremo e quindi non vinceremo e non perderemo nulla. Di conseguenza, avremo vinto $100.

Qui diventa una questione di probabilità. Se la partita finisce con i Patriots che vincono per 3 punti più di una volta su 11, ne usciremo vincitori; meno, saremo perdenti.

I due modi fondamentali per farlo sono: ottenere condizioni più favorevoli o più differenza fra gli handicap. Se si riesce ad avere una quota di 21–20, invece di 11–10, si perderanno solo $5 su ogni partita non azzeccata. Di conseguenza, per chiudere in pareggio, avremo bisogno di vincere solo 1 volta su 21. Se c'è un bookmaker che assegna ai Patriot un handicap di –2 e ½ da affiancare all'handicap dei WagerWorld per i Cowboys di +3 e ½, anche supponendo di scegliere una quota 11–10 su entrambe le puntate, vinceremo $200 se la partita termina con i Patriots che vincono per 3 punti, ne perderemo 10 per qualsiasi altro risultato. Questo specifico esempio chiarisce l'espressione "mediare l'handicap", poiché la partita finisce con un risultato che rientra nella fascia che va da 2 e ½ a 3 e ½.

Mediare gli handicap nel football è leggermente diverso che nel baseball o nel basket, perché nel primo ci sono numeri più "decisivi" di altri.

Per esempio 3, è un numero decisivo perché molte partite incerte vengono decise proprio dal valore di un goal, che è di 3 punti. Ma il 2 non è altrettanto decisivo; basta dare un'occhiata ai risultati delle partite un sabato o una domenica qualsiasi per rendersi conto di quante siano quelle che finiscono con una differenza di punteggio di 3 punti, anziché di 2.

La mediazione sull'handicap è possibile in quanto non esiste un'unica entità monolitica che lo stabilisce, proprio come il prezzo di una scatola di corn-flakes cambia leggermente da un supermercato a un altro. La quota di handicap di partenza – la prima offerta dal bookmaker – può essere diversa, poiché ogni casinò ha un suo modo di stabilire il numero che attirerà su entrambi gli avversari un'uguale quantità di scommesse. Inoltre, i capricci dei giocatori che scommettono in un casinò on-line potrebbero dare origine a uno squilibrio. Supponiamo che l'handicap di apertura di BestBet dia i Patriots favoriti di 3 punti contro i Cowboys – e che su questi ultimi vengano puntati parecchi soldi. Al fine di "equilibrare" l'azione, BestBet ha bisogno di attrarre più giocatori che scommettano sui Patriots, e può farlo abbassando l'handicap da 3 a 2 e ½.

Proprio come ci sono gli arbitraggisti che ricevono le quotazioni dalle Borse mondiali più importanti e si guadagnano da vivere profumatamente sulle differenze di prezzo delle merci, ci sono giocatori che possiedono un account in tutti i casinò on-line e campano mediando gli handicap. Non ho scritto questo libro per convincere la gente che scommettere è un buon modo per fare soldi, ma credo che avrò svolto un'attività socialmente utile se qualcuno lo leggerà e si trasformerà da "giocatore incallito", pronto a puntare su qualsiasi partita e a seguire qualsivoglia suggestione, in un "acquirente" capace di farlo in modo redditizio e conveniente.

Servizi di consulenza

Forse i soli ad apparire in TV con regolarità e a essere più sordidi dei politici sono quelli che si offrono di vendere informazioni sulle partite a venire. Nonostante io sia allergico a personaggi coi capelli impomatati che portano giacconi sportivi da due lire e hanno l'aria di un direttore di casinò a Las Vegas, devo ammettere che alcuni sanno davvero il fatto loro.

Il lavoro sporco siete voi a farlo, però. Una cosa a cui fare attenzione è l'affermazione di avere azzeccato 12 partite e averne sbagliate 2 nelle precedenti due settimane. Che prove ci sono? Hanno puntato contro lo *spread*[9] o il *money-line*? Anche quest'ultima è una scommessa con handicap. Nalla partita USC-Virginia di cui si è parlato in precedenza, la *money-line* è una scommessa con handicap sul tipo di quelle del baseball: l'handicap può essere concesso (puntando sulla squadra della USC) o lo si può ricevere (puntando su quella della Virginia). Questa partita potrebbe essere quotata 11-10; bisognerà puntare 11 dollari sulla squadra della USC per guadagnarne uno, qualora vinca la partita; invece scommettendone uno sulla squadra della Virginia, se dovesse vincere (e ci vorrà parecchia fortuna perché accada), ne otterremo 10. Azzeccare 12 puntate sulla *money-line* e sbagliarne 2 è molto diverso dal farlo contro l'handicap. Sta' a voi scoprirlo; io ho cose migliori da fare nel mio tempo libero.

Bluffare servendosi della teoria dei giochi

Anche se la conoscenza della teoria dei giochi non vi trasformerà in un vincitore, è uno strumento utile da avere a disposizione, specialmente se vi misurerete in situazioni nelle quali il bluff ha una certa importanza, come nel poker.

Nelson Algren, autore de *L'uomo dal braccio d'oro*, una volta propose tre regole di vita: mai mangiare in un posto che si chiami *Mom's*[10], mai giocare a poker contro qualcuno che si chiami Doc, e mai dormire con qualcuno che ha problemi peggiori dei vostri. Due su tre non è male, penserete voi, mentre contemplate una mano niente male a Texas Hold'Em, ma Doc vi guarda negli occhi e fa una grossa puntata. Voi pensate che, se vedete e lui sta bluffando, vincete $700, ma se invece ha carte vincenti, ne perdete 300. D'altra parte, se passate e lui sta bluffando, ne perdete $200, ma se passate e lui ha la mano vincente, finite in pari. Che fare?

Vi scusate precipitosamente e fingete di dover andare alla toilette, dove tirate fuori carta e penna e buttate giù la matrice che segue:

LA VOSTRA MOSSA	DOC HA IN MANO	
	Carte vincenti	*Un grosso bluff*
Vedete	–300	700
Passate	0	–200

Capite in fretta che né voi, né lui potete seguire una strategia pura, perciò effettuate la solita analisi.

LA VOSTRA MOSSA	DOC HA IN MANO		
	Carte vincenti	*Un grosso bluff*	DAR
Vedete	–300	700	200
Passate	0	–200	1000

Dovreste vedere 200 volte e passare 1000, per un rapporto di 1 a 5. Per scoprire se è una proporzione giusta, immaginate che Doc abbia la mano vincente e che voi vediate una volta e passiate cinque. Perdereste in media $300, $50 a partita. Se Doc stesse bluffando, vincereste $700 una volta e ne perdereste 200 cinque volte: di nuovo con una perdita media di $50 a ogni mano.

Non avendo un dado con voi, potete servirvi della lancetta dei minuti dell'orologio per effettuare una scelta casuale, stabilendo che, se si trova fra 0 e 9, vedrete, altrimenti passerete (ci sono 10 numeri fra 0 e 9 e 50 fra 10 e 59). Date un'occhiata all'orologio, tornate nella sala e fate la vostra mossa. Ehi, qui parliamo di vita vera e la cosa importante è giocare in modo vincente sul lungo termine.

Come disse Kenny Rogers: dovete sapere quando passarle e quando tenerle. È solo nei film che Doc viene tradito da un tic all'occhio quando bluffa.

Quando bluffare

Anche in questo caso, sono stati scritti interi tomi su tale tema. Ci sono due idee di fondo dietro i bluff: vincere una scommessa (il bluff, appunto) e far credere al vostro avversario che potreste bluffare, così lui vorrà vedere in risposta a una vostra puntata elevata quando avete davvero una mano vincente. Un bluff del secondo tipo è un investimento non molto diverso da quello di un annuncio pubblicitario. Vediamo come la teoria dei giochi potrebbe gestire una determinata situazione. Avete messo nel piatto $100 e il vostro progetto di fare colore è saltato, lasciandovi con un jack come carta alta. Se puntate $300 e il vostro avversario passa, vincerete $200. Se lui vede, però, avrete perso un totale di $400.

LA VOSTRA MOSSA	LA MOSSA DI DOC	
	Vede	*Passa*
Vedete	–400	200
Passate	–100	–100

Come potete constatare, considerando le mosse caso per caso, l'opzione di vedere per Doc va bene almeno quanto quella di passare, quindi lui vedrà sempre. Di conseguenza, voi dovreste passare. Qui si può ribattere che, se voi passate, lui non potrà più scegliere se vedere o passare. Ma voi potreste invece scegliere di bluffare e mostrare le carte, e Doc di vedere e mostrare o passare.

Eppure se riusciste a fare una stima (basandovi sulle esperienze passate della vostra innata abilità a farlo) con quanta probabilità l'avversario passerà, potreste stabilire, servendovi del valore atteso, quanto quella di bluffare sia una buona idea. Vale un principio molto simile a quello delle assicurazioni: se non bluffate, perderete sicuramente $100, ma se supponete che il vostro avversario passerà per più di metà delle volte, vale la pena scommetterci. Dopotutto, se bluffate due volte e il vostro avversario passa in un caso, guadagnate $200 quando passa, ma ne perdete 400 quando vede, con un'attesa di –100 dollari. Dato che di solito perderete di più quando un avversario vede il vostro bluff di quanto vincerete qualora passi (una puntata di $300 non lo spaventerà certo con un piatto da 10.000), bluffare non è una tattica vincente per una singola mano. Ma se guardate al bluff come soldi investiti per far sì che il vostro avversario veda le vostre buone mani, potrebbe diventarlo.

[1] Gioco di origine cinese simile al bingo e alla lotteria (*n.d.t.*).

[2] Gioco di dadi. Tutti gli esempi di questo capitolo fanno riferimento a giochi molto diffusi negli stati Uniti ma poco noti al lettore italiano. Per comprendere i ragionamenti matematici svolti dall'autore non è tuttavia indispensabile conoscerne le regole nei dettagli (*n.d.t.*).

[3] Handicap: sistema che permette di rendere più equilibrato un confronto impari, togliendo punti o goal alla squadra favorita. Le

scommesse con handicap possono essere proposte in tutti gli sport, ma sono particolarmente frequenti nel rugby e in altri sport americani (*n.d.t.*).

[4] In italia è più comune valutare la "percentuale di pagamento del casinò" o *payback*, che indica la percentuale vinta dai giocatori sul totale delle somme scommesse in un certo periodo di tempo. se, ad esempio, in un mese un casinò paga ai giocatori il 98% di tutte le puntate, si dice che in quel periodo ha avuto un *payback* del 98%. i due indici sono comunque correlati: in questo caso, la percentuale del casinò sarebbe del 2% (*n.d.t*).

[5] Se consideriamo il calcio, l'*over-under* è la scommessa sul totale dei goal segnati in un incontro. Pronosticare un *over* significa scommettere su un numero maggiore di una data quantità di goal, mentre un *under* vuol dire scommettere su un numero di goal inferiore alla quantità stabilita dal bookmaker. Esempio: se viene proposto l'*over-under* 2.5, un pronostico *under* è vincente se il totale dei goal è 2 al massimo; è perdente se nel corso del match sono stati segnati 3 o più goal (*n.d.t*).

[6] "Scambio di scommesse". Gli utenti non scommettono più contro il bookmaker ma contro gli altri utenti della comunità del sito (*n.d.t.*).

[7] In generale il termine *parlay* indica una scommessa che dipende dal verificarsi di più di una condizione. Quello qui analizzato è uno dei più diffusi negli stati Uniti (*n.d.t.*).

[8] *Unit* è un termine normalmente utilizzato nel gergo delle scommesse per indicare l'1% delle proprie risorse; così per chi ha a disposizione $1000, puntare una *unit* vorrà dire scommetterne 10, per chi ne ha 50.000, 500 e così via (*n.d.t.*).

[9] Lo *spread betting* permette di scommettere su un determinato numero di azioni durante un evento sportivo. il compito del giocatore è pronosticare se questo numero sarà superiore o inferiore a una data soglia, che in inglese viene detta *spread* (ad esempio, il numero di corner in una partita di calcio) (*n.d.t.*).

[10] *Da mamma* (*n.d.t.*).

5
Come ottenere voti più alti grazie alla matematica

Azzeccare un test a risposta multipla vi farà ottenere voti più alti? • A quale argomento d'esame dovreste dedicare più tempo? • Quale materia dovreste scegliere per la specializzazione?

Insegno all'università da quasi quarant'anni, e mi meraviglio della poca attenzione che gli studenti sembrano dedicare a sistemi ovvi per ottenere voti migliori. Non parlo del metodo scontato di dedicare più tempo agli studi e meno a Facebook o a scambiarsi SMS. Parlo di come ottenere voti più alti usando un po' di buon senso. La maggior parte di queste tecniche sono collegate alla matematica presente nei test e al modo per organizzare il tempo dedicato allo studio. Però ho un consiglio universalmente valido: a meno che non stiate studiando qualcosa che trovate davvero interessante, non studiate *mai* per più di due ore consecutive. Dico sempre ai miei allievi che, quando risolvono dei problemi di matematica, lo faranno bene durante la prima ora, se la caveranno nella seconda, ma arrivati alla terza avranno il cervello ridotto in poltiglia. Fate una pausa. Un'indagine del 2004 pubblicata sulla rivista «Pediatrics» individuava nel tempo eccessivo passato davanti alla TV una delle possibili cause di questa situazione, ma una cosa è certa: se non siete abbastanza concentrati, non potete avere un buon rendimento nello studio[1].

Strategie per affrontare i test

Per prima cosa dovrei dire che gran parte delle informazioni contenute in questo paragrafo valgono per gli esami a cui viene attribuito un punteggio calcolato matematicamente: test con problemi da risolvere, come quelli di matematica o di scienze, test a risposta multipla e quelli vero-falso. Potreste riuscire ad applicare alcuni di questi suggerimenti a compiti scritti da fare a casa o a temi da svolgere in classe, ma non è il tipo di prove in cui la matematica può esservi davvero di aiuto.

Potrà sembrare ovvio, ma dovreste conoscere il criterio di valutazione del test. In quelli di matematica e di scienze possono esserci o problemi con lo stesso punteggio, o problemi di vario tipo ognuno con un punteggio diverso, indicato chiaramente. Quando tengo dei corsi, a parte quelli di matematica più avanzati, sottolineo l'importanza dei problemi pratici o degli *story problems*[2], ne parlo in modo chiaro agli studenti fin dal primo giorno di lezione e li inserisco nel programma. Altri insegnanti potranno essere meno diretti di me, ma in genere forniranno comunque delle indicazioni, anche se meno esplicite. Se un professore dice che qualcosa è importante, ci sono buone probabilità di trovarlo in un test. In corsi come quelli di matematica o scienze, se sapete che il docente ha una preferenza per un certo tipo di problemi, assicuratevi di fare a casa tutti gli esercizi relativi.

È fondamentale anche sapere se un insegnante attribuisce ai problemi un punteggio “parziale”. Molti professori di matematica e di scienze, forse la maggior parte, lo fanno, perché ritengono comunque degno di merito avvicinarsi alla soluzione corretta. Infine occorre sapere, riguardo ai test vero-falso e quelli a risposta multipla, se si verrà penalizzati per le risposte sbagliate. Questo aspetto è estremamente importante, perché determina se conviene tirare a indovinare o meno.

Se un errore non implica penalizzazioni, non tralasciate di rispondere neppure a una domanda. In questo caso, negli ultimi tre minuti che avete a disposizione compilate tutte le risposte mancanti. Alcuni consigliano di barrare la casella “falso”, nei test vero-falso, e “C” in quelli a risposta multipla. Il mio consiglio è di scegliere a caso: in questo modo, a lungo andare dovreste ottenere un punteggio medio.

In molti test però, come i SAT[3], è prevista una penalità per le risposte sbagliate[4]. Anche in questo caso, la matematica può venire in aiuto, perché serve a calcolare il valore atteso di una risposta che si è tirato a indovinare. Facciamo un esempio: avete di fronte un test a risposta multipla che prevede cinque domande; ogni risposta corretta vale 5 punti, quella in bianco 0, e quella sbagliata –2. La probabilità di indovinare casualmente la risposta giusta è uguale a 1/5. Di conseguenza, il valore atteso di una risposta del tutto casuale sarà $1/5 \times 5 + 4/5 \times -2 = -3/5$. Poiché il risultato è minore di 0, ovviamente è meglio non rispondere. Se però siete in grado di escludere due delle cinque risposte, dovrete buttarvi a indovinare solo sulle altre tre. In questo caso, il vostro valore atteso è $1/3 \times 5 + 2/3 \times -2 = 1/3$; poiché il risultato è maggiore di 0, vale la pena tentare. È importante sapere queste cose prima di affrontare un esame.

Supponiamo ora che voi conosciate le risposte e l’insegnante o il supervisore vi consegnino i test e vi dicano di iniziare. E adesso?

Qualsiasi tipo di prova stiate affrontando – a risposta multipla, vero-falso, o una serie di problemi da risolvere – esaminate il primo quesito e, se sapete *immediatamente* la risposta o come trovarla, fatelo. Altrimenti, passate al problema successivo finché non ne trovate uno che vi sembra semplice e che potete risolvere. Se non riuscite a individuarne uno del genere, o state affrontando un test difficilissimo che richiede competenze da laureati in ingegneria missilistica oppure non avete studiato abbastanza. Nel primo caso, non avete bisogno di questi consigli, e nel secondo niente potrà aiutarvi. Continuate comunque a guardare la prova usando la stessa strategia, in modo che alla fine della prima lettura, avrete risposto a tutte le domande facili.

C’è una valida ragione aritmetica per questo metodo. Se doveste scegliere un lavoro, ne preferireste uno semplice per cui vi pagano 20 dollari l’ora o uno difficile per cui ve ne danno solo 10? La risposta è ovvia. Anche l’esaminatore vi sta pagando per rispondere alle domande, pure se lo fa con un punteggio al minuto, invece che in dollari all’ora. Scegliere il frutto più a portata di mano è il miglior modo di iniziare un esame, sia per ragioni psicologiche che logiche. La maggior parte degli studenti è nervosa all’inizio di un esame e assicurarsi subito dei punti è un buon modo per calmarsi un po’.

Cosa fare dopo aver scorso il testo d’esame una prima volta? Se si tratta di un test vero-falso o di una prova a risposta multipla, calcolate le domande e il tempo che vi restano e stabilite quanto potrete dedicarne mediamente a ognuna. Poi rileggete la prova concedendo a ogni domanda il tempo stabilito. Se non riuscite a rispondere in questo lasso, saltate la domanda o tirate a indovinare, a seconda che il valore atteso delle risposte casuali sia minore o maggiore di 0.

Se dovete svolgere un esame di scienze o matematica che contiene dei problemi con un punteggio diverso, una procedura simile a quella già vista consisterà nello stabilire quanti punti e quanto tempo rimangono in totale, nel calcolare il numero medio di minuti per punto, e poi concedere a ogni problema quel valore medio moltiplicato per i punti a esso assegnati. Facciamo un esempio: se rimangono 50 punti e 30 minuti, la media sarà di 3/5 di minuto per punto. Quindi, a un problema da 15 punti andranno dedicati $15 \times 3/5 = 9$ minuti di lavoro. A meno che non siate in grado di eseguire questo calcolo facilmente e *davvero* in fretta, vi suggerisco di lavorare sul problema con il punteggio minore, perché probabilmente si tratta del più facile. Però non soffermatevi troppo: se vedete che non andate da nessuna parte, passate al successivo. I tempi morti dovrebbero essere evitati a ogni costo.

Nel corso degli anni, ho osservato molti studenti mentre sostenevano gli esami. Ne ho visto alcuni davvero bravi e altri veramente somari, e non li ho soltanto osservati, ma ho fatto loro delle domande. E mi sembra che perfino i migliori non si rendano conto che affrontare un esame scritto è un'impresa competitiva, e che, come tutte le competizioni, meriti qualche valutazione strategica. Non credo che una buona tattica possa fare la differenza fra un pessimo e un ottimo risultato, ma forse potrebbe cambiare un punteggio pessimo in uno medio e uno medio in uno ottimo.

Ho visto infatti molti studenti fare proprio la cosa sbagliata durante un esame: lavorare con furia sul problema più difficile. Credo ci sia per questo comportamento una motivazione inconscia: gli studenti hanno la sensazione che, se riusciranno a togliersi dai piedi la parte più dura, la strada sarà poi tutta in discesa. È abbastanza vero, ma potrebbero perdere troppo tempo a battere la testa contro il muro. Durante un esame non ci si può permettere di farlo.

È interessante notare che la strategia di togliere di mezzo prima le cose più difficili è ottima sia quando ci si dedica a incombenze di routine, come lavare i piatti o fare il bucato, sia nel caso di compiti in qualche modo correlati ad altri, come quelli svolti da un gruppo di persone. In quest'ultimo caso, eliminare per prime le incombenze che richiedono più tempo e quelle più difficili serve a rendere meno probabili le situazioni di "ingorgo", quelle cioè in cui una risorsa cruciale serve contemporaneamente a molte persone.

Strategie per alzare la media dei voti

Ovviamente, il primo e più importante passo per alzare la vostra media è ottenere test con voti più alti nei test, perciò se avete saltato il paragrafo precedente, tornate indietro. Ci sono però anche altre cose che potete fare.

La prima è imparare a studiare proficuamente. Ho già detto che non bisogna farlo per tre ore di fila, a meno che non si tratti di una materia che amate davvero. Uno studio proficuo, però, non equivale necessariamente al miglior modo per memorizzare nozioni o apprendere procedure. Un modo per migliorare la media è anche quello di conoscere come viene calcolata dal punto di vista matematico.

Molti studenti non prestano troppa attenzione a tale aspetto. Ogni tanto qualcuno può accorgersi di quella che sembra un'incoerenza, qualcosa tipo ottenere una media inferiore alla sufficienza pur avendo una A, due B e una C. Ma anche se cerca di comprendere le ragioni di questa incongruenza, non sempre poi le utilizza a suo vantaggio.

Il motivo di una media inferiore alla sufficienza con una A, due B e una C, è che i corsi non hanno tutti lo stesso valore. Nella maggior parte degli istituti, la media viene calcolata valutando l'importanza da dare a un voto a seconda delle *units*[5] associate al corso. Diamo un'occhiata a una di queste medie.

CORSO	UNITS	VOTAZIONE	PUNTEGGIO CORRISPONDENTE
Algebra II	3	B	9
Spagnolo II	3	B	9
Storia americana	3	A	12
Biologia	4	C	8
Units totali = 13 Punteggio totale = 38 Media = 2,92			

Il punteggio assegnato a ogni corso viene calcolato moltiplicando il numero di *units* per il valore numerico del voto (A = 4, B = 3 e così via), e la media viene ricavata dividendo il punteggio ottenuto per il numero delle *units*. Biologia è un corso con laboratorio, in cui a volte è necessario fare cose sgradevoli come dissezionare rane, e normalmente a tali classi vengono assegnati più punti. Tradizionalmente ai corsi facili, dal punto di vista della votazione, come educazione fisica o musica, vengono date valutazioni più basse.

Come dovrebbe influire tutto questo sul metodo di studio? La maggior parte degli allievi stabilisce una certa quantità di ore di lavoro per ogni corso. Naturalmente, essa varia a seconda della materia (alcuni riescono meglio in alcune piuttosto che in altre) ma è ragionevole supporre che non ci siano grandi differenze. Se però vi rimane del tempo libero, e non sapete come utilizzarlo, dovreste dedicarlo al corso con più *units*. Passare da una B a una A in Algebra II vale 3 punti, ma trasformare quella C in biologia in una B ne vale 4.

Se è importante comprendere come vengono valutati i test, lo è altrettanto capire il metodo usato per calcolare la media. C'è una notevole differenza nella strategia per aumentare la media in una scuola in cui vengono assegnati ai voti i valori standard di A = 4, B = 3 e così via, e in una che aggiunge ai voti i segni + e –, in cui una B+ = 3,3 e una A– = 3,7. Quando in una scuola vengono utilizzati il + e il –, ha poco senso darsi da fare per alzare un voto a scapito di un altro. Dove invece vengono assegnati voti standard (senza i segni + e –), la strategia di studio può avere un impatto importante sulla media. Per approfittare di tale opportunità, dovete conoscere la vostra situazione prima dell'esame finale, presente in quasi tutti i corsi.

Quello che dovete fare nel primo caso è passare all'offensiva quando il voto ha un segno positivo (B+, C+), e giocare in difesa quando ha un segno negativo (A–, B–). Il vantaggio derivante dal far passare una B+ a una A– è tangibile, ma non avrete nulla da guadagnare trasformando una B– in una B o persino in una B+. Io valuto tutti gli esami secondo una scala che va da 0 a 100 (facile da calcolare per gli esami di matematica o quelli a risposta multipla ma probabilmente non altrettanto per una tesina) e faccio sempre sapere agli studenti di quale punteggio hanno bisogno per riuscire ad avere un determinato voto. Nel mio istituto c'è una regola per cui l'esame finale influisce sul voto complessivo dal 25 al 33% (la percentuale esatta è a discrezione dell'insegnante), quindi se uno studente ha una valutazione che si trova a metà di una certa fascia (una B, una B– o una B+), è improbabile che il punteggio dell'esame finale possa cambiare il voto complessivo. Uno studente che ha come media una B piena a metà corso probabilmente non otterrà una A alla fine, a meno che non consegni un compito perfetto, e per chi ha una B è poco probabile. D'altra parte, a meno che non prenda una D+ o una C– all'esame finale, manterrà quasi sicuramente la sua B. Perciò che senso ha ammazzarsi di lavoro per cercare di trasformare una B in A quando si è quasi certamente condannati al fallimento? Sono energie sprecate.

Il rovescio di questa particolare medaglia è che dovrete studiare davvero sodo per trasformare una B+ in una A–, o per far sì che una B– non diventi una C+. Ecco perché, prima ancora che apriate i libri per prepararvi all'esame finale, è importante che facciate esattamente il bilancio della vostra situazione. La strategia di studio sarà infatti molto diversa se avete tre B piene oppure una B, una B– e una B+. Nel primo caso, probabilmente non avrete bisogno di lavorare molto per lasciare invariata la situazione. Nel secondo, nel corso dove avete una B piena dovrete studiare solo quel che basta a conservarla, e dedicare il resto delle energie a mantenere la B– e a trasformare la B+ in A–.

Alcuni insegnanti fanno come me: dicono esattamente agli studenti qual è la loro situazione prima dell'esame finale. Altri si aspettano che i ragazzi ci arrivino da soli a partire dalle informazioni di cui sono in possesso (i punteggi dei test e i voti comunicati loro), ma quasi tutti, se uno studente va nel loro ufficio e chiede esplicitamente quanto deve prendere all'esame finale per ottenere un determinato voto, gli daranno una risposta chiara.

Il tempo e le energie di un allievo sono risorse limitate e ogni individuo vuole far fruttare al meglio ciò che investe. Gli argomenti qui discussi non sono certo alta ingegneria, ma spesso sono poco noti ai diretti interessati. Ho visto studenti destinati a ottenere quasi certamente una B, se il punteggio del loro esame finale si aggirerà intorno ai 30 punti, affollarsi nel mio ufficio per chiedermi aiuto durante l'ultima settimana di lezione. Io do loro il sostegno che cercano, e finiscono con l'ottenere una B+ in classe, che si traduce in una B nel giudizio finale. Spero che nel frattempo non si siano lasciati sfuggire l'opportunità di trasformare una B+ in una A–, o quella di evitare che una B– diventi una C+.

Alcuni voti sono più uguali di altri

Come diceva la famosa frase pronunciata dal maiale Napoleone ne *La fattoria degli animali* di George Orwell, tutti gli animali sono uguali, ma alcuni sono più uguali degli altri. Lo stesso vale per i voti e per le medie.

All'università e, in misura minore, alle superiori, c'è differenza fra lo studente che prende voti alti in una materia particolare o in un gruppo di materie, e quello che prende voti alti in generale. Molti si iscrivono all'università avendo in mente una carriera che richiederà una specializzazione o un dottorato. In diversi casi, l'università prende in esame per l'ammissione soltanto i risultati nei corsi collegati a quel particolare settore di studi. Per vari anni ho svolto la funzione di tutor per i dottorandi del dipartimento di matematica e da noi venivano presi in considerazione solo i voti degli ultimi due anni del diploma di laurea. Infatti nella mia università non ha importanza la media complessiva per essere ammessi al dottorato di matematica: la sola qualifica richiesta è una laurea in matematica o una che includa otto corsi di matematica negli ultimi due anni (per facilitare gli studenti di fisica, informatica o economia che l'abbiano scelta come materia complementare).

D'altra parte, per essere ammessi ad alcune specializzazioni non è necessario aver conseguito una laurea particolare. Ho appena dato uno sguardo alle FAQ del sito della School of Law dell'UCLA, e una delle domande è: «Quale laurea è necessaria per essere ammessi alla School of Law dell'UCLA?»[6]. La risposta è che non viene richiesta nessuna laurea specifica. Se fate domanda dopo aver frequentato il mio college, tenete presente il fatto che chi si laurea in matematica generalmente ha una media finale di 0,70-1 punti più bassa di quella di chi si laurea in criminologia. Se dopo aver conseguito un diploma superiore desiderassi diventare avvocato, la cosa migliore sarebbe farmi ammettere a una buona scuola di specializzazione in legge, e sicuramente ci penserei due volte prima di prendere una laurea in matematica invece che in criminologia. Sono certo che i membri della commissione per le ammissioni alla School of Law non sono nati ieri e si rendono conto che probabilmente la matematica è un corso di laurea più difficile di quello in criminologia o cinema. Eppure se devono valutare due studenti con un punteggio al test di ammissione più o meno equivalente (e non vedo proprio di quale aiuto potrà essere un corso sulle equazioni differenziali per ottenerne uno migliore), e uno di loro ha una laurea in matematica con una media di 2,60, mentre l'altro in cinema con una media di 3,50, sarà difficile prendere le parti del matematico.

La domanda-trabocchetto

In molti dei corsi diversi dalla matematica che ho frequentato (ne ho davvero seguiti alcuni, non solo alle superiori ma anche all'università) c'era quella che io definivo la "domanda-trabocchetto". L'insegnante annunciava che per un certo esame sarebbe stata richiesta la stesura di una tesina su un argomento scelto tra due soggetti, e si poteva solo tirare a indovinare quale sarebbe stato effettivamente. In genere avevo l'impressione di poter scrivere una buona tesina, se solo avessi avuto tempo per studiare l'argomento, altrimenti avrei dovuto arrampicarmi sugli specchi. Per qualche ragione, sembrava sempre che l'insegnante volesse farmi scegliere tra un argomento piuttosto facile, in cui se avessi dovuto improvvisare avrei potuto cavarmela relativamente bene, e uno difficile, nel quale senza studiare non avrei avuto alcuna possibilità. Ecco il problema: quale scegliere se avete tempo da dedicare solo a un argomento?

Ecco un'altra opportunità per utilizzare la matematica al fine di migliorare i vostri voti. Per prima cosa, dovrete valutare come ve la cavereste in ognuna delle situazioni prospettate. Ci sono due diversi temi da studiare, e tra questi l'insegnante può scegliere l'oggetto della tesina. Compilerò una matrice della teoria dei giochi per illustrare quest'idea, anche se in tal caso c'è da fare un passo di più.

VOI STUDIATE	L'INSEGNANTE SCEGLIE	
	L'argomento facile	*L'argomento difficile*
L'argomento facile	A	D
L'argomento difficile	C	B

La prima cosa da decidere è se potete permettervi di prendere una D. Alcuni corsi sono essenziali per l'indirizzo scelto, e in questi dovete ottenere almeno una C; per gli altri è sufficiente una D per passare l'esame e proseguire per la vostra strada. Naturalmente se non potete permettervi di prendere una D *dovete* studiare l'argomento difficile.

Forse in questo momento avete una vaga sensazione di déjà-vu. Sì, vi siete già imbattuti in una situazione simile: nel primo capitolo, quando avete fatto una breve pausa per partecipare a un quiz televisivo.

Dopo aver vinto 100.000 dollari, il conduttore vi ha offerto di scegliere se tenerli o scambiarli con la possibilità più allettante di vincerne 1.000.000. In quel caso avevamo visto che se i 100.000 dollari servono per far operare vostro figlio, non ha importanza il valore atteso di questo scambio. Qui ci troviamo di fronte a una situazione analoga.

Supponiamo invece che sia semplicemente una questione di media: desiderate ottenere la media più alta sul lungo periodo. Anche stavolta il problema rientra a pieno titolo nella teoria dei giochi.

Traducendo i voti in cifre, la matrice sarà così delineata:

VOI STUDIATE	L'INSEGNANTE SCEGLIE	
	L'argomento facile	*L'argomento difficile*
L'argomento facile	4	1
L'argomento difficile	2	3

Potete vedere facilmente che non esiste una strategia pura da seguire: non potete concentrarvi su uno solo degli argomenti ed essere certi di ottenere un voto migliore che se aveste studiato l'altro, a prescindere dal tema che l'insegnante sceglierà. È arrivato perciò il momento di passare ai numeri.

VOI STUDIATE	L'INSEGNANTE SCEGLIE		
	L'argomento facile	*L'argomento difficile*	DAR
L'argomento facile	4	1	1
L'argomento difficile	2	3	3

La risposta? Dovreste studiare l'argomento facile una volta e quello difficile tre volte. Potete verificare che tale opzione vi darà una media attesa di 2,5 a prescindere dall'argomento che sceglierà l'insegnante.

Ho deliberatamente scelto una matrice che richiedesse una strategia mista, ma questa è una buona procedura solo se disponete di un tempo limitato e dovete scegliere l'argomento da studiare per la "domanda-trabocchetto". Un'altra possibilità è dividere il tempo di studio fra i due temi. In genere gli allievi dedicheranno metà del tempo a ciascuno di essi ma, supponendo che si riesca a studiare ogni ora con lo stesso profitto, bisognerebbe ripartirlo secondo la proporzione 75 a 25, a favore dell'argomento più difficile.

[1] D.a. Christakis *et al.*, *Early Television Exposure and Subsequent Attentional Problems in Children* , in «Pediatrics 113», n. 4, aprile 2004, pp. 708-13.

[2] Un esercizio o test presentato sotto forma di racconto. Lo studente deve determinare quali elementi della storia sono rilevanti per la risoluzione del problema. L'obiettivo è quello di facilitare il passaggio da concetti astratti a situazioni pratiche (*n.d.t.*).

[3] *Scholastic Aptitude Test* o *Scholastic Assessment Test*: sono sistemi di valutazione del livello di scolarizzazione utilizzati come test d'ingresso al college e di solito suddivisi in tre sezioni: comprensione del testo scritto, matematica, capacità di scrittura (*n.d.t.*).

[4] *How the Test Is Scored*: www.collegeboard.com/student/ testing/sat/scores/understanding/howscored.html.

[5] Le *units* sono una sorta di crediti formativi e rappresentano l'impegno in ore richiesto in classe e a casa. Generalmente ad una *unit* corrispondono settimanalmente un'ora di lezione in classe e due ore di lavoro a casa (*n.d.t.*).

[6] UCLA Law Web site, *Frequently Asked Questions*, www.law.ucla.edu/home/index.asp?page_806#Undergraduate_Majors.

6
Come aumentare la propria aspettativa di vita

Quanto è pericoloso andare veloce? • Perché una ricetta medica potrebbe prescrivere una posologia sbagliata? • Si deve affrontare un’operazione a rischio?

Spero che prima che scada il copyright di questo libro il mio agente riesca a venderne i diritti sul pianeta Vulcano (quello di *Star Trek*). Dopotutto, il saluto che i vulcaniani si scambiano fra loro è «Lunga vita e prosperità», e utilizzare l’aritmetica per il raggiungimento di tali obiettivi è il fulcro del mio libro. Questo capitolo riguarda la prima parte del saluto.

Non è solo un numero

Una delle prime cose che impariamo a fare con la matematica è misurare. Anche se sembra ovvio e banale, confrontare implica misurare, e spesso i numeri quantificano un rischio. Ecco perché ci conviene prestare loro attenzione.

Molti numeri di questo genere hanno a che fare con la nostra salute. Ricordo che da giovane mi colpì molto scoprire che, per ogni mezzo chilo di grasso in più, il nostro corpo sviluppa cinque chilometri di vasi sanguigni attraverso i quali il cuore è costretto a pompare sangue. Il cuore è un muscolo impressionante, ma credo che sia capace di fare solo una quantità limitata di lavoro, e quando tale limite viene raggiunto, si arriva al capolinea. Di conseguenza, ho sempre prestato parecchia attenzione al peso. La pressione ha un’importanza analoga: un’ipertensione di secondo grado è caratterizzata da una pressione uguale o superiore a 160, e questo aumenta di molto le possibilità di avere un attacco di cuore. Come diceva saggiamente il poeta Andrew Marvell ne *Alla sua timida amante*: «La tomba è un luogo splendido e discreto. Ma nessuno, mi sa, che là s’abbracci». A me piacerebbe scambiare ancora parecchi abbracci, letterariamente e fisicamente, prima della mia dipartita, e quindi prendo le precauzioni necessarie perché la mia pressione arteriosa non si alzi.

Quando a metà degli anni Sessanta il Ministero della sanità pubblicò i risultati di una ricerca che collegava il fumo con il cancro ai polmoni, ridussi a zero il mio abituale consumo di due pacchetti al giorno, anche se mi ci vollero quasi due anni per riuscirci. Sono un professore di matematica e credo fermamente nelle cifre. Naturalmente cerco di capire quanto siano documentate, ma ritengo che ignorarle sia contrario al buon senso. Alcune cifre sono soltanto numeri, ma altre no: sono segnali d’allarme, e dovremmo prestar loro attenzione.

I numeri rappresentano uno strumento per stabilire confronti che non ha eguali, per la loro capacità di andare all’essenziale. Sebbene io nutra una maggiore fiducia in un medico che ha studiato ad Harvard piuttosto che in un infermiere o in un dottore che si è laureato in un istituto di minor prestigio, quello che davvero mi interessa (in un medico come in un avvocato o in un meccanico) è quante volte questa persona abbia già svolto procedure simili a quella che sta per eseguire su di me (o per il mio caso legale o sulla mia auto) e in quanti casi con successo. Mi piacerebbe che fosse obbligatorio per legge rendere accessibili al pubblico tali informazioni, ma non credo che avverrà nell'immediato futuro. Su questo argomento c'è un articolo piuttosto recente intitolato *Physicians' Credentials: Haw Can I Check Them?* ("Credenziali mediche: come verificarle?"), del dottor Stephen Barrett, che potete trovare su Internet[1].

Chiedetevi cosa preferireste per scegliere un medico: un buon curriculum di studi e professionale o l'equivalente in cifre di quello che per un giocatore di calcio è il numero di goal effettuati nel corso della carriera? Per me non c'è paragone: voglio le cifre.

La consapevolezza che i numeri possono aiutarci a restare in salute è importante, ma non è esattamente l'argomento di questo capitolo. La maggior parte di noi pensa alla matematica in termini di cose da fare con i numeri un po' più complesse di un semplice confronto. Insomma, addizione, moltiplicazione, divisione... cose di questo genere. Perciò diamo un'occhiata a come la matematica, quella che ha a che fare con le operazioni aritmetiche, può contribuire a proteggerci nella vita di tutti i giorni.

La velocità uccide davvero

Il mondo all'inizio del ventunesimo secolo è di gran lunga più frenetico di quanto non lo fosse un secolo prima. Pensate solo a quanto è successo nelle comunicazioni. Cento anni fa, una lettera avrebbe impiegato una settimana o giù di lì per viaggiare da una costa all'altra degli Stati Uniti, e verso la metà del secolo scorso una telefonata di tre minuti tra New York e Los Angeles costava 2 dollari (e parliamo di dollari del 1950). Oggi molti di noi non aspettano neppure di arrivare a casa per leggere le e-mail: le guardiamo sul palmare o sul cellulare.

Sfortunatamente, il desiderio di velocizzare la nostra vita può avere conseguenze disastrose quando siamo sulla strada. Perfino la proverbiale vecchia signora oggi corre troppo, grazie alla seducente capacità delle automobili moderne di far sembrare relativamente bassa una velocità superiore ai 120 chilometri orari. Ricordo che da giovane, quando andavo in autostrada a 80 chilometri all'ora, mi sembrava che intorno a me tutto scorresse velocissimo; oggi, quando vado a 110, mi pare che il paesaggio circostante scorra tranquillamente.

Consideriamo quanto poco ci sia da guadagnare, e quanto invece da perdere, aumentando la velocità da 100 a 120 km/h. Credo di vivere a una maggiore distanza dal posto di lavoro di quanto non capiti alla gran parte delle persone; percorro sulla superstrada all'incirca 25 chilometri. Dato che, andando a 100 chilometri orari, faccio 1,67 km al minuto, per coprirne 25 a quella velocità impiego circa 15 minuti. A 120 km/h si percorrono 2 chilometri al minuto, quindi i 25 verranno coperti in 25/2 = 12,5, cioè in 12 minuti e mezzo. Passando da 100 a 120 km/h guadagnerei poco più di due minuti. Che prezzo devo pagare per questo risparmio?

Per prima cosa, dispongo di meno tempo per reagire a un eventuale pericolo. Quando frequentavo la scuola guida, mi hanno insegnato che è necessario lasciare fra noi e l'automobile che ci precede una distanza pari all'incirca alla lunghezza di una macchina ogni 15 km/h. Questa regola di buon senso potrebbe ancora essere applicata nelle zone meno popolate, ma sulle superstrade di Los Angeles, quando il traffico scorre veloce, c'è davvero poco spazio fra un veicolo e quello che gli sta davanti. Ma anche se si riuscisse a seguire alla lettera tale regola, probabilmente la distanza non basterebbe a evitare un incidente. Ricordate: 15 chilometri all'ora sono 15.000 metri ogni 3600 secondi, perciò in un secondo un'auto percorrerà 15.000/3600 metri, più o meno 4 metri al secondo. La vostra macchina misurerà più o meno 4 metri e mezzo. A 95 km/h, viaggerete grossomodo a 27 metri al secondo, perciò coprirete in un secondo una distanza equivalente a sei automobili. Ciò vuol dire che se la macchina di fronte a voi inchioda per una ragione o per l'altra, avete un secondo di tempo per reagire e perché i freni vi facciano fermare. Se viaggiate a 110 chilometri all'ora percorrerete all'incirca 30 metri al secondo, perciò le sette auto di distanza verranno di nuovo annullate in un secondo. Ancora una volta, avete a disposizione un secondo in tutto per reagire e frenare, ma i vostri freni dovranno faticare molto di più a 110 km/h di quanto facciano a 95. Avrete una certa quantità di tempo in più se la macchina di fronte si limita a frenare velocemente, ma il peggio può sempre capitare. Non c'è bisogno di dire (ma lo dirò comunque) che questo margine diminuisce se la visibilità non è troppo buona o le condizioni di guida rendono incerta la frenata. Adoro Los Angeles, ma resto esterrefatto dal modo in cui i guidatori del luogo siano convinti che con la pioggia bisogna procedere più velocemente. Nella California del Sud piove di rado, ma quando succede di solito evito di prendere la superstrada.

Se vi capita di fare un incidente mentre state viaggiando a 95 km/h, non sarà piacevole, ma a 110 km/h vi andrà molto peggio. L'energia cinetica, cioè quella associata al movimento, aumenta con il quadrato della velocità, perciò il rapporto fra l'energia cinetica di una macchina che viaggia a 110 rispetto a una che viaggia a 95 sarà $110^2/95^2 = 1{,}34$. Quindi, un'auto che va a 110 km/h possiede oltre un terzo di energia cinetica in più rispetto a una che viaggia a 95 km/h. A 120 km/h, una macchina ha un'energia cinetica maggiore del 60% rispetto a una che va a 95 km/h. La limousine di Lady Diana non ha retto a un incidente nel quale la velocità del mezzo è stata stimata intorno ai 95 km/h, e neanche la principessa è sopravvissuta. Siete veramente sicuri di voler risparmiare quei 2 minuti per coprire una distanza di 25 chilometri?

Non sono la prima persona in campo scientifico a interessarsi di quest'argomento. Max Tegmark, un fisico del MIT, ha eseguito dei calcoli di valore atteso basandosi su dati raccolti all'inizio del secolo. Vale la pena elencare le sue conclusioni e ragionarci su. I suoi calcoli sono semplici da seguire, perlomeno per i lettori di questo libro[2].

Negli Sati Uniti ogni ora di guida lungo una superstrada interstatale diminuisce l'aspettativa di vita di 19 minuti. Incredibile. Probabilmente trascorro in media 6 ore alla settimana sulle superstrade interstatali, il che vuol dire che ogni settimana guidare la macchina sottrae alla mia aspettativa di vita 2 ore circa. Si tratta più o meno di 4 giorni e mezzo all'anno, e nel corso di un'esistenza potrebbero essere 8 mesi della mia aspettativa di vita che svaniscono mentre percorro una superstrada. Però ne vale la pena, anche perché so che mi verranno tolti alla fine e non nel mezzo.

Ogni ora di guida nel traffico urbano diminuisce l'aspettativa di vita di 8 minuti. Ovviamente guidare in città è più sicuro perché i limiti di velocità sono più bassi. Mi chiedo se Tegmark abbia incluso nei suoi calcoli la possibilità che l'auto venga rubata durante una rapina.

Ogni ora trascorsa su una moto diminuisce l'aspettativa di vita di 5 ore. Queste conclusioni dovrebbero scoraggiare i motociclisti che rombano allegramente a 130 km/h sulla superstrada. A essere sinceri, anche prima di leggere le statistiche di Tegmark, non avrei mai corso questo rischio. Semplicemente, non ci si può permettere di fare un incidente su una moto, e gli incidenti sono inevitabili.

Ogni volo all'interno degli Stati Uniti diminuisce l'aspettativa di vita di 13 minuti. Ecco perché volare è meno rischioso che guidare.

Percentuali: l'argomento meno comprensibile della matematica

È per me un'incessante fonte di stupore vedere quanti errori vengono compiuti quando si ha a che fare con le percentuali. Ho letto interventi svolti da economisti durante convegni prestigiosi in cui vengono commesse le gaffe più eclatanti proprio nei calcoli che riguardano le percentuali. È così facile combinare guai a questo proposito che ho deciso di sottoporre la mia classe a un'indagine informale.

Matematica 109 è un corso trimestrale, di norma seguito da studenti che non hanno intenzione di scegliere un indirizzo che richieda specifiche conoscenze di calcolo. Per l'indirizzo infermieristico, ad esempio, è obbligatorio seguire un corso di statistica, ma agli studenti che scelgono un indirizzo storico è sufficiente seguire una classe come matematica 109 per soddisfare le conoscenze aritmetiche richieste dall'università. Io tengo questo corso per l'*Honors Program*[3] del nostro ateneo, che generalmente attira studenti brillanti e curiosi. Decisi di scoprire quale fosse il livello generale delle loro conoscenze matematiche e assegnai perciò un test con le quattro domande che seguono. Potete prendervi qualche minuto per cercare di rispondere anche voi. Più avanti vi fornirò le soluzioni.

1. Il prezzo della benzina la settimana scorsa è sceso del 10%. Questa settimana è tornato a essere come all'inizio della scorsa settimana. Di quale percentuale è aumentato il prezzo della benzina questa settimana?
2. Il prezzo della benzina la settimana scorsa è salito del 10%. Questa settimana è tornato a essere quale era all'inizio della scorsa settimana. Di quale percentuale è diminuito il prezzo della benzina questa settimana?
3. Il prezzo della benzina salirà del 10% questa settimana e del 10% la prossima settimana. Di quale percentuale aumenterà il prezzo della benzina in queste due settimane?
4. Il prezzo della benzina diminuirà del 10% questa settimana e del 10% la prossima settimana. Di quale percentuale diminuirà il prezzo della benzina in queste due settimane?

Quindici studenti fecero il test: su 60 risposte, 6 erano corrette; di queste 4 furono date da Mara, la migliore della classe. Dieci compiti erano identici e rispondevano: «del 10%» alle domande 1 e 2, e «del 20%» alle domande 3 e 4.

Il modo più semplice di risolvere i problemi che riguardano le percentuali "pure", che hanno cioè a che fare solo con le percentuali invece che con unità "concrete" come volumi o denaro, è quello di partire da una base di 100. Per il problema 1, se partite da un prezzo iniziale della benzina di 100 e il prezzo diminuisce del 10%, dato che il 10% di 100 è 10, il nuovo prezzo sarà $100 - 10 = 90$. Per ritornare al prezzo iniziale, bisognerà salire di 10 unità da una base di 90, un aumento percentuale di $100 \times 10/90 = 11\,{}^1/_9\%$. Un ragionamento simile dimostra che nel problema 2 il prezzo deve diminuire di 10 unità da una base di 110, una diminuzione percentuale di $100 \times 10/110 = 9\,{}^1/_{11}\%$. Per inciso, quando gli studenti replicano che il prezzo della benzina è di 2 dollari a gallone, non di 100, io rispondo che si tratta di 100 unità da due centesimi, e che il prezzo di qualsiasi cosa è 100. Si tratta solo di capire quale sia l'unità di misura, e questo può essere fatto dividendo per 100 il prezzo reale.

Gli altri due problemi vengono risolti con un procedimento analogo. Nel problema numero 3, se si inizia da un prezzo di 100, la prima settimana questo aumenta del 10% arrivando a 110 (proprio come nel problema 2), ma la settimana successiva aumenta del 10% di 110, arrivando a 121. Nel corso di queste due settimane il prezzo è aumentato di 21 unità su una base di 100, cioè del 21% (se non vi è chiaro potete servirvi della formula di percentuale 100 × 21/100 = 21). Nel problema 4, se si parte da un prezzo di 100, la prima settimana questo scende del 10% da 100 fino a 90, e la settimana successiva scende del 10% da 90 a 81, scendendo così complessivamente da 100 a 81 nel corso di due settimane, cioè del 19%.

È interessante osservare che nella mia classe 10 studenti su 15 hanno commesso lo stesso errore in ogni problema. Non hanno cioè considerato che la percentuale si calcola sempre sul valore "attuale", non su quello "passato". Una diminuzione di prezzo del 10%, seguita da un aumento del 10%, non riporterà al prezzo originario, perché la diminuzione del 10% si calcola utilizzando come base il prezzo di partenza, mentre l'aumento del 10% si calcola a partire dal prezzo ottenuto dopo quella diminuzione. Poiché quest'ultimo valore è inferiore a quello di partenza, l'aumento di prezzo del 10% a partire dalla base più bassa non può compensare la diminuzione del 10% a partire dalla base iniziale (più alta).

Non sono solo i miei studenti a sbagliare nel calcolo delle percentuali. Il 5 novembre del 2008, il giorno dopo le elezioni presidenziali americane, sentii il cronista di una nota radio conservatrice (di cui non farò il nome) citare le cifre che seguono: nel 2004, il 37% dei votanti si dichiarò repubblicano, il 37% democratico e il resto indipendente. Nel 2008, il 39% dei votanti si dichiarò democratico, il 32% repubblicano e il resto indipendente. Dopo aver citato queste cifre, il radiocronista osservò che il 5% dei repubblicani era diventato democratico o indipendente. Quanti errori scorgete in questa sua dichiarazione?

Siete bravissimi, se vi siete accorti dei due che seguono: primo, il numero dei votanti era diverso nel 2008 rispetto al 2004 e non si può quindi trarre alcuna legittima conclusione numerica. È anche plausibile che non solo il numero dei votanti fosse diverso, ma i votanti stessi; molti di coloro che avevano votato nel 2004 potrebbero non averlo fatto nel 2008, e viceversa. Secondo, e importante ai fini del nostro tema, anche se la base dei votanti fosse stata identica, il 5% dei *votanti* (non dei repubblicani) è passato da repubblicano a democratico o indipendente. Infatti 5 su 37 repubblicani hanno cambiato partito e, se si fa il calcolo partendo da una base di 100, si vede che la percentuale è del 13,5%.

Ci sono tanti modi per morire

Gli equivoci con le percentuali possono uccidervi in tanti modi. Il più ovvio è quello relativo ai dosaggi delle medicine, che vengono a volte fraintesi. Un caso che ha avuto molta risonanza si è verificato presso il prestigioso Cedars-Sinai Medical Center di Los Angeles, quando ai gemellini nati all'attore Dennis Quaid venne somministrato un anticoagulante (eparina) con un dosaggio mille volte più alto del dovuto[4]. Questo errore si verifica con tale frequenza da essere stato chiamato "morte per virgola decimale". Accade quando un farmacista non sa dire dove il dottore ha posto la virgola decimale, o quando qualcuno prescrive un dosaggio in cui la concentrazione del medicinale scritta sul flacone è espressa in milligrammi per millilitro, mentre il dottore l'aveva in origine espressa in milligrammi per litro. In quest'ultimo caso, l'errore è grossolano, ma ha sempre a che fare con la matematica, perlomeno in una certa misura.

La "morte da percentuali", dal punto di vista matematico, è una questione più sofisticata, ma ugualmente fatale. È facile infatti spiegare gli errori nella somministrazione dei medicinali espressi in percentuali (o in frazioni, che danno adito agli stessi problemi): la causa sta nella variazione della base di partenza e può avere conseguenze notevoli. Avevo sempre pensato che le persone di una certa cultura non avessero problemi con il calcolo delle percentuali, finché non mi capitò di leggere agli inizi degli anni Novanta un articolo scritto da un economista dello Hoover Institute di Palo Alto, nel quale compariva un grave errore di questo tipo[5]. Mi venne in mente allora che sbagli simili potevano verificarsi nelle ricette mediche. Un paziente che assume un farmaco a lui indispensabile potrebbe reagire bene alla cura e il medico potrebbe prescrivergli una riduzione del 75% del dosaggio. Si verifica una ricaduta e il dottore commette l'errore prescrivendogli di aumentare il dosaggio del 75%, oppure informa la persona responsabile della somministrazione del farmaco che è necessario ripristinare il dosaggio originario, motivo per cui la dose viene aumentata del 75%. Come è evidente, se si parte da una base di 100, ridurre il dosaggio del 75% darà come risultato 25, e aumentare quest'ultimo del 75% lo aumenta al 43,75, meno di metà della dose originaria.

L'errore relativo alla base di partenza può avere come conseguenza anche un'overdose, che può verificarsi in realtà in due modi diversi: per un calcolo inesatto o per un errore di comunicazione. Il primo caso capita se il medico aumenta la dose del 100% una prima volta e poi ripete l'operazione credendo di triplicare il dosaggio originario, quando lo sta in realtà quadruplicando.

Naturalmente sbagli del genere non dovrebbero verificarsi, ma allora neppure la navicella spaziale Mars, che è costata molti milioni di dollari, avrebbe dovuto perdersi perché alcuni membri del team si servivano del sistema di misurazione inglese e altri del sistema metrico decimale[6]. Come ho già detto, ho visto persone con un master in economia, materia che prevede uno studio approfondito della matematica, fare confusione con le percentuali. Perciò mi ha fatto molto piacere apprendere che ai medici viene richiesto di scrivere le ricette specificando le quantità precise dei dosaggi, per garantire che non si verifichino errori relativi alle percentuali. Oggi però non tutte le decisioni che riguardano i farmaci vengono prese dai dottori, almeno negli Stati Uniti, quindi mi auguro che tutto il personale, dai dottori alle infermiere ai paramedici, si attenga alla prassi di indicare dosaggi specifici per tutti i farmaci.

Sperando che non dobbiate mai servirvene

A volte la matematica può riguardarci davvero da vicino. A me successe verso la fine degli anni Ottanta, quando mio padre venne sottoposto a quella che sembrava una serie infinita di visite. Era un uomo di grande forza d'animo, che era riuscito a superare un infarto, problemi intestinali e un ictus. Nel periodo in cui fu ricoverato in ospedale io avevo la potestà decisionale per le cure mediche che lo riguardavano. Esisteva una procedura nuova e abbastanza rischiosa per la quale il chirurgo desiderava la mia autorizzazione. Parlai con lui per una decina di minuti ed ebbi l'impressione che fosse sincero a proposito del desiderio di aiutare mio padre e che non desiderasse semplicemente tentare un nuovo esperimento. Sebbene non riuscissi a ottenere dal dottore cifre esatte, dovevo capire se mio padre si trovava o meno in una condizione in cui quell'intervento l'avrebbe aiutato. Consultai un medico che conoscevo per farmi consigliare, ma quello non era il suo campo e la procedura non gli era familiare, anche se andò a studiarsela su una rivista specializzata. Se ne parlava come di un intervento nuovo e promettente, ma rischioso. Dopo aver parlato sia con il chirurgo che con questo medico, compilai la matrice che segue in base a una stima approssimativa delle probabilità che mio padre se la cavasse:

CONVIENE TENTARE?	MIO PADRE HA BISOGNO DI SOTTOPORSI ALL'INTERVENTO?		
	Sì	*No*	*DAR*
Sì	60	30	70
No	10	80	30

Non c'è bisogno di dire che non c'era una strategia pura. Le probabilità erano 7 a 3 a favore dell'intervento e mettendole a confronto con la necessità di mio padre di sottoporvisi si può vedere che le sue probabilità di sopravvivere erano $(7 \times 60 + 3 \times 10)/10 = 45\%$.

Come potete immaginare, la mia fiducia nella teoria dei giochi non era tale da farmi affidare la vita di mio padre a un sistema basato sul caso, quindi cercai disperatamente di escogitare un'alternativa. Se non fossi riuscito a trovarla, confidavo nel fatto che avrebbe capito quello che stavo cercando di fare (quando era già più che settantenne dedicava ancora la domenica mattina alle conferenze di matematica tenute da un professore dell'università di Chicago). Fortunatamente non dovetti prendere questa decisione o giustificarmene con lui. Quando riacquistò coscienza mi sollevò da questa responsabilità dicendomi solo che si rifiutava di sottoporsi ad altre pratiche invasive. Rispettai la sua scelta, come spero mia moglie rispetterà la mia se mai arriverò a quel punto. Fu l'ultima decisione importante che prese, perché morì una settimana dopo. Forse è stata l'unica volta in vita mia in cui sono stato contento di non mettere in pratica la mia conoscenza della matematica.

1 Vedi Quackwatch, www.quackwatch.org/04ConsumerEducation/Qa/mdcheck.html.

2 *Life Expectancy Calculations*, http://space.mit.edu/home/tegmark/death.html#lifeexpec.

3 Si tratta di un'estensione del corso di laurea breve che contempla classi più diversificate e impegnative, e a volte un anno in più di studio (*n.d.t.*).

4 *Dennis Quaid's Twins among Three Newborns Given Drug Overdose*, www.foxnews.com/story/0,2933,312357,00.html.

5 G. Marotta, *Invitation to a Tea Party*, in «Los angeles Times», 11 aprile 1994, p. B7.

6 *NASA's Metric Confusion Caused Mars Orbiter Loss*, www.cnn.com/TECh/space/9909/30/mars.metric.

7
Come la matematica può farvi avere la meglio in una discussione

Le iniezioni di liquidità erano l'unico modo per salvare le banche? • Davvero la logica è dalla vostra parte? • Quali sono le prime tabelline che imparano i bambini sul pianeta di Spock?

Quando andavo a scuola, seguii dei corsi di scienze e di filosofia, ritenendo che la scienza potesse aiutarmi nella ricerca della conoscenza e la filosofia in quella della saggezza. La logica è il fondamento di entrambe e, come disse una volta il comandante Spock di *Star Trek*, la logica rappresenta il punto di partenza della saggezza, non quello d'arrivo. Ma da qualche parte bisognerà pur cominciare...

La domanda da settecento miliardi di dollari

Dio mio, come s'è alzata la posta da quando io ero bambino. Mi ricordo che ascoltavo alla radio *La domanda da 64 dollari* e che fui parecchio sorpreso quando il jackpot aumentò di tre ordini di grandezza, diventando, in televisione, *La domanda da 64.000 dollari*.

Pochi decenni dopo, ecco *Chi vuol esser milionario?* Ma tutto questo è niente in confronto al recente tentativo di convincere il popolo americano che sia logico il salvataggio delle banche attraverso prestiti di addirittura 700 miliardi di dollari – diciamo pure un bilione. Il ragionamento funziona pressappoco così:

1. Se non prestiamo alle banche 700 miliardi di dollari, il mercato del credito si congelerà.
2. Se il mercato del credito si congela, l'economia ne risulterà gravemente danneggiata.
3. Di conseguenza, se prestiamo 700 miliardi di dollari alle banche, l'economia non verrà gravemente danneggiata.

Questo è, in parole povere, il succo del ragionamento utilizzato da ogni industria alla ricerca di norme a suo favore. Ma si tratta di un ragionamento logico?

La carta vincente in assoluto

Uno dei metodi più comuni per avere la meglio in una discussione è sostenere di avere la logica dalla propria parte. Essa viene considerata quasi da tutti come la carta vincente in assoluto: praticamente nessuno osa mettere in discussione un ragionamento che viene riconosciuto come logico. Le regole del confronto consentono di mettere in discussione la conclusione di un ragionamento considerato logico contestandone le premesse, ma solo pochi ne confutano il meccanismo logico. Uno dei motivi è che la maggior parte delle persone non ha intrapreso uno studio sistematico della logica. Riconosce come "logiche" alcune semplici argomentazioni, e spesso è in grado di individuare deviazioni evidenti come quella degli argomenti *ad hominem*[1], ma una comprensione generale della logica è purtroppo poco diffusa, come d'altronde quella della matematica.

Ecco un esempio relativamente semplice. Un modo di dire comune è: «Se semini vento raccogli tempesta». Molte persone credono che la proposizione «Se non semini vento non raccogli tempesta» scaturisca logicamente dalla prima. Dopotutto, il consiglio di non "seminare vento" è accettato virtualmente da tutti (perlomeno da tutti quelli che vogliono una vita tranquilla), ma non si tratta di una conclusione logica, come vedremo nel resto del capitolo, quando ci occuperemo di logica simbolica.

La logica simbolica

Spesso tengo corsi di matematica per studenti di scienze umanistiche, ovvero insegno matematica ai poeti e ad altri personaggi definibili con nomi meno altisonanti. Di solito, gli studenti del corso si presentano alla prima lezione nervosi quasi come se andassero dal dentista. Sanno che farà male, ma non sanno bene quanto. Comincio sempre dalla logica simbolica, perché non fa male neanche un po', nemmeno ai poeti.

Ci sono molti modi diversi di combinare due numeri. Potete sommarli, sottrarli, moltiplicarli, dividerli, elevarne uno alla potenza dell'altro, o prendere il maggiore (o il minore) dei due: e questi sono solo i sistemi più comuni per combinarli. Eppure a scuola si inizia sempre con l'addizione e la moltiplicazione. Immagino sia perché sono sempre state operazioni considerate fondamentali per il commercio: c'è bisogno dell'addizione per calcolare il costo totale di una serie di oggetti acquistati da qualcuno e c'è bisogno della moltiplicazione (che è la somma dello stesso numero ripetuta più volte) quando qualcuno compra più articoli identici allo stesso prezzo.

La gente studia aritmetica non perché essa abbia un valore intrinseco, ma perché può soddisfare una necessità reale: quella di fare i conti nel commercio. Quando si deve stabilire se un ragionamento sia o meno logico, si può anche in quel caso far ricorso all'aritmetica, ma non si tratta esattamente della stessa materia, e le tabelline sono molto più semplici, e in gran parte le conoscete già.

L'aritmetica della logica venne concepita perché si occupasse di proposizioni vere o false. Per renderla adatta a un computer, alle proposizioni vere viene assegnato il valore 1 e a quelle false il valore 0. Proprio come i numeri sono adatti ad alcune cose e non ad altre, così le etichette "vero" e "falso" vanno bene per alcune proposizioni e non per altre. Con "vero" e "falso" intendiamo proposizioni universalmente accettate come l'una o l'altra cosa, per qualunque ragione. «2 + 2 = 4» è una proposizione vera per motivi aritmetici, «Fresno è la capitale della California» è una proposizione falsa perché la capitale della California è Sacramento, e «Fresno è un posto fantastico dove abitare» è una proposizione né vera, né falsa perché dipende dai punti di vista. Proprio come possiamo servirci della parola "uno" al posto della cifra "1" quando ci dedichiamo alla normale aritmetica, potremmo servirci della parola “vero” o della cifra “1” – o adottare una posizione intermedia e scegliere “V” per vero e “F” per falso. Farò così io, perché si tratta di una sorta di via di mezzo, che mantiene il vantaggio simbolico della cifra ma ci ricorda quello che il simbolo sta a rappresentare.

Ora, come vogliamo lavorare con questa nuova specie di numeri? Per fortuna l’inglese (e la maggior parte delle altre lingue) possiede già una certa quantità di modi per creare nuove proposizioni partendo da quelle già esistenti. I più comuni sono le negazioni, le congiunzioni, le disgiunzioni e le implicazioni, che riconoscete dalle parole usate più spesso per indicarle: “non”, “e”, “o”, “implica”.

Negazione

La negazione di una proposizione può ottenersi in due modi. Il più semplice è dato da una corretta collocazione della parola “non”. Se *p* è la proposizione «Fresno è la capitale della California», allora *non p* è la proposizione «Fresno non è la capitale della California». Nel caso fosse difficile capire dove collocare il “non”, semplicemente ponete «È falso che» davanti alla proposizione, ottenendo (in questo caso) «È falso che Fresno sia la capitale della California».

La tabella aritmetica per il “non” è abbastanza semplice. Utilizzeremo la lettera *p* a rappresentare la proposizione.

p	*non p*
V	F
F	V

La prima riga della tabella dice che quando *p* è vero, *non p* è falso, e la seconda riga dice che quando *p* è falso, *non p* è vero. Non avete dovuto imparare granché di nuovo, no?

La valutazione di una proposizione richiede semplicemente di risolvere prima le parentesi interne, proprio come si calcolerebbe un’espressione aritmetica come [2 + 3 × (4 + 5)]. Questa dà luogo alle seguenti proposizioni aritmetiche:

$$[2 + 3 \times (4 + 5)]$$
$$(2 + 3 \times 9)$$

Dato che troppe parentesi sono una vera seccatura, i matematici hanno sviluppato una gerarchia di operazioni nota come PEMDAS. Questo espediente mnemonico rappresenta l’ordine di svolgimento delle operazioni nel calcolo di espressioni quali 2 + 3 × 9: Parentesi, Esponenti, Moltiplicazioni, Divisioni, Addizioni, Sottrazioni. La M in PEMDAS precede la A, quindi le moltiplicazioni vanno fatte per prime. Proseguendo,

$$(2 + 27)$$
$$29$$

Se sapete che *p* è vero, potete ricavare la verità o falsità di *non* (*non p*) semplicemente procedendo dall'interno all'esterno come sopra.

non (*non V*)
non F
V

Fate la stessa cosa per una proposizione *p* falsa e scoprirete che *non* (*non F*) ha il valore di *F*. In altre parole, *non* (*non p*) e *p* hanno sempre lo stesso "valore di verità": vero o falso. In aritmetica si usa il segno di uguaglianza per indicare che due espressioni hanno lo stesso valore numerico, a prescindere dal valore delle variabili che le compongono: $x + x = 2x$. Questa espressione è chiamata "identità" e alcuni testi si servono di un segno di uguaglianza con tre barre per indicarla: $x + x$; $2x$. In logica, quando due espressioni, come *non* (*non p*) e *p*, hanno lo stesso valore di verità a prescindere da quello delle proposizioni che le compongono, diciamo che esse sono "logicamente equivalenti".

Congiunzione e disgiunzione

La congiunzione unisce due proposizioni *p* e *q* per mezzo dell'operatore *e*. Così come accade nell'uso comune, *p e q* è vera solo quando entrambe le proposizioni *p* e *q* sono vere. «Sacramento è la capitale della California», e «2 + 2 = 4», sono proposizioni vere, e tutti concorderanno che «Sacramento è la capitale della California e 2 + 2 = 4» è una proposizione vera, anche se in molti si chiederanno perché vi sia venuto in mente di accostarle. Similmente, «Los Angeles è la capitale della California e 2 + 2 = 4» verrà considerata falsa; basta un'unica mela marcia (falsa) a far guastare il cesto della congiunzione.

La disgiunzione unisce tra loro due proposizioni *p* e *q* per mezzo dell'operatore *o*, ma qui esiste un'ambiguità. La parola "o" può usarsi in due modi diversi. La "o" esclusiva ci chiede di scegliere un'unica alternativa, come in «Hai votato per McCain o per Obama?». La "o" inclusiva ci permette di scegliere entrambe le alternative. Se il cameriere vi chiede: «Gradisce un caffè o un dolce?», non potrà che fargli piacere se risponderete «entrambi», perché allora il conto, e la sua mancia, aumenteranno. La logica simbolica ha adottato la "o" inclusiva, e così la proposizione *p o q* è falsa solo quando sia *p* che *q* lo sono.

Come risultato, otteniamo in logica le tabelle aritmetiche che seguono, comunemente note come "tabelle di verità".

p	*q*	*p e q*	*p o q*
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

È molto più semplice memorizzare le tabelle di verità che le tabelline della moltiplicazione: per cominciare, avete già familiarità con la struttura del linguaggio; in secondo luogo, le tabelline della moltiplicazione hanno $9 \times 9 = 81$ voci da memorizzare (e anche di più, se dovete imparare a memoria quelle del 10, 11 e 12), mentre le tabelle di verità hanno solo $2 \times 2 = 4$ voci per ogni operazione.

Implicazione

Il cuore e l'anima della logica simbolica, la sua *raison d'être*, è l'operatore di implicazione *p implica q* (scritto in molti testi sotto forma di *se p, allora q*). Anche se la scoperta che *non* (*p o q*) è equivalente da un punto di vista logico a (*non p*) *e* (*non q*) è sicuramente significativa, si tratta di qualcosa che già sapevate: quando il cameriere vi chiede se desiderate un caffè o un dolce e voi rispondete "no", siete entrambi consapevoli che ciò equivale al rifiuto del caffè e del dolce.

Lo scopo della logica simbolica è di stabilire quando un ragionamento è valido, evidenziando l'unico caso in cui sicuramente non lo è: quando, partendo da una premessa vera, giunge a una conclusione falsa. Di conseguenza, la tabella di verità di *p implica q* ha un preciso obiettivo: l'implicazione risulterà falsa solo quando *p* è vera e *q* è falsa. Schematicamente:

p	*q*	*p implica q*
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

I miei studenti di scienze umanistiche non hanno difficoltà con le prime due righe. Be', non è proprio esatto, a volte riesce loro difficile accettare la verità della proposizione: «La capitale della California è Sacramento implica che 2 + 2 = 4». Posso capirli: non esiste un ragionamento logico che colleghi un dato di fatto geografico con una verità matematica. L'operatore di implicazione, però, è solo un mezzo per scovare un inganno, costruito per individuare i ragionamenti sbagliati che partono da una premessa vera *p* e finiscono con una falsa conclusione *q*. Questo spiega anche perché sono vere le implicazioni delle ultime due righe. L'implicazione non è stata progettata per analizzare un ragionamento al fine di appurare se sia costituito da una successione di proposizioni, ognuna delle quali scaturisce logicamente dalle precedenti; è stata progettata per individuare un ragionamento palesemente falso.

Il calcolo del valore di una complicata proposizione composta procede, come avviene nel caso di un'espressione algebrica, dalle parentesi più interne verso l'esterno. Nell'esempio che segue, supporremo che *p* e *q* siano proposizioni vere, e *r* ed *s* false; valuteremo il valore di verità di un'espressione composta facendo un passo alla volta.

p implica (r o (q e non s))
V implica (F o (V e non F))
V implica (F o (V e V))
V implica (F o V)
V implica V
V

Come bere un bicchier d'acqua.

Ora che abbiamo l'artiglieria pesante, possiamo affrontare l'ultima battaglia: determinare se un ragionamento sia valido oppure no.

Quando è valida un'implicazione?

Un'implicazione è valida se è vera indipendentemente dalla veridicità delle proposizioni semplici che la compongono. Diamo un'occhiata a un ragionamento davvero semplice, che chiunque considererebbe valido a priori: (*p e q*) *implica p*. Ci sono due strade per dimostrarlo. Quella più semplice è la costruzione di una tabella di verità che prenda in esame tutte le possibili combinazioni dei valori di verità di entrambe le proposizioni.

p	*q*	*p e q*	*(p e q) implica p*
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Non male, ma c'è un modo più breve (specie quando ci sono più di due proposizioni a formare il ragionamento): provate a "falsificare" l'implicazione dandole una falsa premessa e una conclusione vera. In questo caso, non può essere fatto: perché la conclusione sia falsa, *p* (la conclusione) deve essere falsa. Da ciò deriva che *p e q* sarà falso, ma allora

(p e q) implica p si riduce a *F implica F*, che è *V*.

Avvalorare un ragionamento

Parte delle difficoltà che le persone hanno nel decidere se un ragionamento sia logico o meno sta nel non saper distinguere fra l'espressione formale (formula) del ragionamento (che utilizza delle lettere per rappresentare delle proposizioni) e il ragionamento vero e proprio (che utilizza proposizioni vere e proprie). Affinché un ragionamento sia logico, la sua formula deve essere tale che non possa *mai* sviarvi: è impossibile assegnare un valore di verità a singole proposizioni che danno luogo a un'ipotesi vera e a una conclusione falsa. In alcuni casi specifici, un ragionamento potrà essere corretto, ma non valido. È qualcosa di simile alla differenza che nell'algebra intercorre fra un'equazione e un'identità. L'equazione $x + 2 = 5$ è corretta solo quando $x = 3$, ma l'identità $x + x = 2x$ è valida qualunque sia il valore di x. I valori numerici nell'algebra equivalgono all'attribuzione dei valori di verità nella logica simbolica.

Ora potrebbe essere il momento giusto per tornare al ragionamento precedentemente esaminato in questo capitolo. «Se non semini vento non raccogli tempesta» è la conclusione logica derivante dall'ipotesi «Se semini vento raccogli tempesta»?

Indichiamo con *p* la proposizione «semini vento», e con *q* la proposizione, «raccogli tempesta». La prima proposizione – «Se semini vento raccogli tempesta» – verrà abbreviata con «*p implica q*», e la seconda proposizione – «Se non semini vento non raccogli tempesta» – con «*non p implica non q*».

Il ragionamento allora sarà

(p implica q) implica (non p implica non q).

Il nostro compito è determinare se sia possibile "falsificare" il ragionamento appurando se esistono valori di verità per p e q per i quali l'implicazione è falsa. Se ciò potesse essere fatto, allora *p implica q* dovrebbe essere vero e *non p implica non q* dovrebbe essere falso. Perché *non p implica non q* sia falso, *non p* deve essere vero (cioè p è falso) e *non q* deve essere falso (cioè q è vero). Ma quando p è falso e q è vero, *p implica q* è vero, quindi il ragionamento *può* essere falsificato.

Alcuni potrebbero sostenere che il solo caso da considerare nel ragionamento sia quello in cui la scarpa sta giusta: sarebbe a dire, p è vero. Sebbene si possa dimostrare che il ragionamento è vero in tutti i casi in cui p è vero, noi dobbiamo prendere in considerazione il ragionamento intero, e quindi anche i casi in cui p è falso; proprio come non si può sostenere che la proposizione $x + 2 = 5$ è valida perché si è trovato un caso, $x = 3$, in cui tale proposizione è vera.

Il meccanismo che abbiamo sviluppato non viene utilizzato per scoprire la verità, ma per capire se la sua espressione formale lo rende suscettibile dell'errore logico di una premessa vera che implichi una conclusione falsa. Consideriamo un tipico ragionamento che potremmo aver sentito o letto sui giornali di qualche anno fa.

1. Se Bush darà ascolto alle forze armate, la guerra in Iraq non continuerà dopo che la vittoria sarà stata dichiarata.
2. Bush non ha dato ascolto alle forze armate.
3. Quindi la guerra in Iraq continuerà dopo che la vittoria sarà stata dichiarata.

Si potrebbe obiettare che la prima proposizione è frutto del senno di poi, ma nessuno può mettere in discussione la verità delle proposizioni successive. Allora, questo ragionamento è logicamente valido? Parte da una considerazione che la maggior parte delle persone accetterebbe a posteriori, e le altre proposizioni sono vere. Come lo analizziamo?

Teniamo presente che lo scopo della logica simbolica non è quello di dimostrare la verità, ma di mettere in guardia da una premessa vera che approda a una conclusione falsa. Ci sono due proposizioni fondamentali in questo ragionamento. Indichiamo «Bush dà ascolto alle forze armate» con p, e «la guerra in Iraq continuerà dopo che la vittoria sarà stata dichiarata» con q. Date queste abbreviazioni, la prima riga diventa *p implica non q*, la seconda riga è *non p*, e la terza riga q. Il ragionamento si serve della congiunzione delle prime due proposizioni come ipotesi di un'implicazione la cui conclusione è la terza proposizione. Molti sillogismi possono essere scritti su tre righe e hanno questa forma: una gigantesca implicazione ottenuta attaccando "se" davanti al risultato della congiunzione della riga uno e due tramite "e", e concludendo con un "allora" davanti alla terza riga. Simbolicamente il ragionamento diventa

((p implica non q) e (non p)) implica q.

Il ragionamento è valido se, a prescindere dai singoli valori di verità di p e q, la grossa implicazione della riga superiore è sempre vera, proprio come accadeva nel ragionamento precedente. È un po' difficoltoso qui costruire una tabella della verità; vediamo allora se possiamo falsificare il ragionamento.

Per farlo, la conclusione deve essere falsa, quindi il valore di verità di q è F. Poiché l'ipotesi deve essere vera, entrambe le proposizioni (*p implica non q*) e *non p* devono essere vere; poiché *non p* deve essere vero, *p* deve essere falso. Inserendo il valore di verità nel ragionamento ed elaborandolo, avremo:

((p implica non q) e (non p)) implica q
((F implica non F) e (non F)) implica F
((F implica V) e V) implica F
(V e V) implica F
V implica F
F

Il ragionamento su Bush e l'Iraq potrebbe essere corretto, poiché i valori di verità di questo particolare ragionamento (la storia ha dimostrato che *p* e *q* erano entrambi falsi) costituiscono un'implicazione vera, ma questa rappresenta solo una delle quattro righe possibili nella tabella di verità che corrisponde a tutte le possibili combinazioni dei valori di verità di *p* e di *q*. Il ragionamento è valido (da un punto di vista logico) solo se tutte e quattro le combinazioni possibili, tra i valori di verità di *p* e di *q*, danno un'implicazione vera.

Analizziamo la domanda da settecento miliardi di dollari

È giunto finalmente il momento di considerare analiticamente il ragionamento con cui abbiamo iniziato questo capitolo:

1. Se non prestiamo alle banche 700 miliardi di dollari, il mercato del credito si congelerà.
2. Se il mercato del credito si congela, l'economia ne risulterà gravemente danneggiata.
3. Di conseguenza, se prestiamo 700 miliardi di dollari alle banche, l'economia non verrà gravemente danneggiata.

Ora avete gli strumenti necessari. Se volete provarci da soli, prendetevi una pausa prima di leggere l'analisi. Avete due possibilità: una tabella di verità lunga otto righe (terribile) o la falsificazione. Permettetemi di suggerirvi la seconda come via più praticabile.

Cominciamo con l'abbreviare le proposizioni. Indichiamo con *p* l'assunto «prestiamo alle banche 700 miliardi di dollari», con *q* «il mercato del credito si congelerà» e per finire con *r* «l'economia ne risulterà gravemente danneggiata». La prima riga del ragionamento è *non p implica q*, la seconda è *q implica r*, e l'ultima è *p implica non r*. Congiungendo le prime due righe per ottenere l'ipotesi di una gigantesca implicazione, di cui la terza riga sarà la conclusione, avremo la proposizione:

((non p implica q) e (q implica r)) implica (p implica non r).

Per falsificare questo ragionamento, la conclusione *p implica non r* deve essere falsa, il che può accadere solo quando *p* è vero e *non r* è falso... in altre parole, quando *r* è vero. Poiché l'ipotesi deve essere vera – e l'ipotesi consiste di due proposizioni unite fra loro dalla congiunzione "e" – ognuna delle proposizioni deve essere vera. Se *non p* è falso, la proposizione *non p implica q* è vera, a prescindere dal valore di verità di *q*. Similmente, se *r* è vero, la proposizione *q implica r* è vera, a prescindere dal valore di verità di *q*. Di conseguenza, dare per vere tutte e tre le proposizioni dovrebbe falsare il ragionamento. Vediamo:

((non p implica q) e (q implica r)) implica (p implica non r)
((non V implica V) e (V implica V)) implica (V implica non V)
((F implica V) e (V implica V)) implica (V implica F)
(V e V) implica F
V implica F
F

Regalare 700 miliardi di dollari alle banche sarà pure una mossa vincente, ma non mi convincerete mai che sia una cosa logica da farsi perché, da un punto di vista logico, il ragionamento non regge.

Nel libro *It Takes a Pillage: Behind the Bailouts, Bonuses and Backroom Deals from Washington to Wall Street* [2] (*Una vera rapina: dietro le quinte dei salvataggi finanziari, degli incentivi e degli accordi segreti tra Washington e Wall Street*), l'ex manager finanziario della Goldman-Sachs Nomi Prins obietta che la cifra vera non è quella miseria di 700 miliardi, ma ammonta a ben 12,7 bilioni di dollari. Sono andato a controllare presso il dipartimento di analisi economica degli Stati Uniti e ho scoperto che nel 2008 il PIL era di circa 14 bilioni di dollari[3]. Mi auguro vivamente che quei 12,7 bilioni – se la cifra è vera – saranno ammortizzati nel giro di un paio di secoli, perché mi darebbe molto fastidio il pensiero che, su 14 dollari prodotti negli Stati Uniti nel 2009, 13 circa siano andati alle banche.

È davvero aritmetica

A questo punto potreste esservi convinti del valore della logica, ma essere ancora scettici riguardo alla sua appartenenza all'ambito dell'"aritmetica". Proverò a convincervi.

Ci serviremo solo della moltiplicazione, della sottrazione e di un'altra operazione: trovare il più alto tra due numeri. Normalmente viene scritta in questo modo: max(a,b) (per il valore più alto fra a e b); max(5,3) = 5. Ah, sì, per renderci la vita ancora più semplice, utilizzeremo solo i numeri 0 (che corrisponderà a *F*) e 1 (che corrisponderà a *V*). Lasceremo la lettera p a indicare una proposizione, e utilizzeremo la maiuscola P per designare un numero corrispondente a p; quando p è *V*, P è 1, e quando p è *F*, P è 0. Consideriamo ora insieme le tabelle di verità e le tabelle delle operazioni; ho realizzato le prime con lo schema normalmente utilizzato per le tabelle dell'addizione e della moltiplicazione. Innanzitutto, confrontiamo le operazioni *non p* e $1 - P$.

p	*non p*	
V F	F V	

P	$1-P$	
1 0	0 1	

Potrete notare delle ovvie somiglianze, come pure nel confronto che segue fra le tabelle per *p e q* e *PQ*.

p e q

		q	
		V	F
p	V	V	F
	F	F	F

PQ

		Q	
		1	0
P	1	1	0
	0	0	0

Le somiglianze non finiscono qui. Guardiamo le tabelle per *p o q* e max(*P*,*Q*).

p o q

		q	
		V	F
p	V	V	V
	F	V	F

max(P,Q)

		Q	
		1	0
P	1	1	1
	0	1	0

E l'ultima tessera del puzzle, le tabelle per *p implica q* e max (1 –*P, Q*).

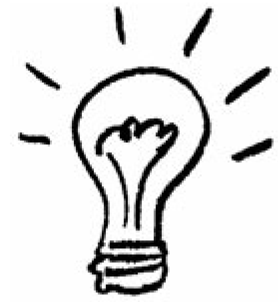
p implica q

		q	
		V	F
p	V	V	F
	F	V	V

max(1–*P*,*Q*)

		Q	
		1	0
P	1	1	0
	0	1	1

Questo fenomeno – cioè la somiglianza diretta fra due sistemi matematici – è noto come "isomorfismo". L'implicazione pratica è che la logica e l'aritmetica sono semplicemente due modi diversi di concepire una stessa idea. Non sarà l'aritmetica che ci è familiare, ma è pur sempre aritmetica. Secondo la banca-dati della Flotta Stellare, si tratta delle prime tavole aritmetiche che i bambini imparano su Vulcano, il pianeta d'origine del logicissimo Dottor Spock.



[1] Strategia della retorica che consiste nello screditare una proposizione o un'argomentazione attaccando la persona che la sostiene, invece di confutare gli argomenti che questa ha esposto (*n.d.t.*).

[2] Nomi Prins, *It Takes a Pillage: Behind the Bailouts, Bonuses and Backroom Deals from Washington to Wall Street,* hoboken nJ, John Wiley and sons, 2009 (*n.d.t.*).

[3] Rapporti economici nazionali del dipartimento dell'analisi economica, *Tabella del prodotto e del reddito nazionale,* www.bea.gov/national/nipaweb/TableView.asp?selectedTable=5 & FirstYear=2008 & LastYear=2009 & Freq=Qtr.

8
Come arricchirsi grazie alla matematica

Come si possono guadagnare soldi grazie agli enti emettitori di carte di credito? • Rifinanziare il mutuo farà davvero risparmiare? • Un'automobile ibrida conviene?

Sebbene i supercomputer di oggi siano in grado di svolgere miliardi di calcoli al secondo nel tentativo di risolvere alcuni importantissimi problemi relativi a scienza, medicina e ingegneria, è molto probabile che l'uso più comune della matematica ha a che vedere col denaro.

Finanza: basta la matematica

La maggior parte delle persone non si interessa granché di finanza, e invece dovrebbe. La finanza può incidere molto sulla nostra qualità di vita. Sebbene questo capitolo non contenga novità sconvolgenti – né dal punto di vista matematico, né economico – sarà tuttavia estremamente utile e leggerlo vi aiuterà quasi sicuramente a prendere decisioni in campo finanziario.

I prestiti sono l'anima del commercio

Non sono un economista, ma credo non ci sia stata innovazione economica che abbia avuto più peso nel progresso della civiltà dell'idea di pagare per farsi prestare del denaro. Se ci pensate, è un dato naturale: i soldi servono ad acquistare beni e servizi, compiono quindi un lavoro. E qualunque lavoro dev'essere retribuito.

La maggior parte dei nostri acquisti importanti vengono pagati grazie ai prestiti. Molti di noi, senza un prestito, non sarebbero potuti andare all'università, la maggior parte di noi non avrebbe potuto comprare un'auto, se avesse dovuto pagarla in contanti, e quasi nessuno avrebbe una casa se, per viverci, avesse dovuto pagare subito tutto l'importo. E non sarebbe stato possibile lo sviluppo della tecnologia, che oggi ci facilita così tanto la vita, senza quell'infrastruttura finanziaria che ci permette di possedere dei beni acquistandoli a credito.

Gran parte della matematica finanziaria riguarda i pagamenti futuri di beni comprati a credito. Si incentra su un'idea molto importante: il "valore attuale" di un pagamento.

L'indiscutibile valore del valore attuale

Consideriamo come funzionano gli interessi. Se il tasso annuo è del 6% e prendete in prestito 100 dollari per un anno, tra dodici mesi a partire da adesso dovrete restituirne 106. Il "valore attuale" di un pagamento di 106 dollari tra un anno a partire da adesso, con un tasso di interesse del 6%, è perciò uguale a 100 dollari: in una banca che paga il 6% di interesse annuo, bisogna mettere 100 dollari *adesso* per averne 106 fra dodici mesi. Ma se avete bisogno di averne 106 fra un anno e il tasso di interesse è del 4,8%, adesso dovrete ovviamente depositarne di più di 100 – per essere precisi, 101,15. Diciamo che il valore attuale di 106 dollari da qui a un anno, con un tasso del 4,8%, è di 101,15. Se, però, i tassi di interesse fossero aumentati, diciamo al 7%, ora dovreste depositare solo 99,07 dollari per averne 106 fra dodici mesi. Quando il tasso di interesse diminuisce, il valore attuale di un debito futuro aumenta – quindi avete bisogno di più soldi *adesso* per essere in grado di ripagarlo in futuro. Al contrario, quando il tasso di interesse aumenta, il valore attuale di un debito futuro diminuisce. Il valore attuale di una serie di pagamenti, come le rimanenti rate mensili del vostro mutuo, si calcola semplicemente addizionando il valore attuale di ognuno di essi[1].

Se ci riflettete, il modo in cui il valore attuale viene condizionato dalla variazione dei tassi di interesse non è così sorprendente. Supponiamo, per semplicità di calcolo, che i tassi di interesse siano del 5% e dobbiate effettuare un pagamento di $1000 all'anno per un acquisto fatto. Se adesso avete in banca $20.000, alla fine dell'anno ne avrete guadagnati 1000 di interessi (il 5% di 20.000). Dovrete solo riscuotere gli interessi, pagare i vostri $1000 e lasciare i $20.000 in banca, dove alla fine dell'anno successivo avrete maturato altri $1000 per la rata seguente e così via. Se il tasso di interesse si abbassa al 4%, guadagnerete soltanto $800 di interessi e dovrete così compiere la temuta operazione di "intaccare il capitale" per effettuare il vostro pagamento. Se, però, il tasso d'interesse aumenta fino al 6%, avrete guadagnato $1200 di interessi e, una volta pagata la rata, ve ne resteranno 200, che potrete spendere in beni voluttuari o depositare sul vostro conto per maturare altro interesse.

L'inflazione e i tassi di interesse

L'inflazione si ha quando, con il trascorrere del tempo, vi è un aumento del costo di beni e servizi. Spesso questi rincari sono determinati dalle forze del mercato: negli ultimi anni il prezzo di un litro di benzina è quasi raddoppiato perché la domanda è cresciuta, la fornitura non si è tenuta al passo con la domanda e il Medio Oriente, l'area che fornisce la maggior parte della benzina consumata nel mondo, era – e rimane – fortemente instabile. Nello stesso periodo, tuttavia, il prezzo medio di una casa è diminuito. Sono stati ideati vari indicatori per misurare il tasso generale di inflazione, approssimativamente definito come aumento medio del costo dei beni e dei servizi di cui usufruisce una famiglia-tipo.

Teoricamente, a tutti piacerebbe prendere in prestito del denaro a un tasso inferiore a quello dell'inflazione. Per semplicità, immaginiamo che otteniate 100.000 dollari al 4% quando l'inflazione è al 5%. Potreste semplicemente acquistare adesso dei beni al costo di $100.000, rivenderli a $105.000 fra un anno, spendere i $104.000 necessari a restituire il prestito e mettere da parte i $1000 rimanenti per i giorni di magra. Naturalmente si tratta di un esempio semplicistico e poco realistico, ma fa capire perché è buona norma prendere in prestito una somma a un tasso inferiore a quello dell'inflazione. Il rovescio della medaglia è che, ottenendo soldi a un tasso più alto dell'inflazione, si possono avere dei problemi. Ritornando all'esempio precedente, se prendete in prestito $100.000

al 4% quando il tasso di inflazione è del 3%, sarete in grado di vendere le vostre merci per soli \$103.000, ottenendone \$1000 in meno rispetto ai \$104.000 che vi sono necessari per restituire il prestito.

Maggiore è la differenza tra il tasso di inflazione e il tasso di interesse, maggiore sarà il buco che dovrete colmare. Il credito presenta due grosse insidie: le carte di credito e l'acquisto di una casa. Sebbene su questi argomenti e altri a essi correlati siano stati scritti tanti libri da riempire intere biblioteche, è possibile occuparsi dei loro aspetti salienti in una trattazione relativamente breve.

Carte di credito: utilità e rischi nascosti

Insegno in un campus e praticamente tutti i giorni passo davanti a uno stand (o più di uno) dove si cerca di convincere degli studenti a richiedere una carta di credito, invogliandoli con una t-shirt gratis, un iPod o Dio sa cos'altro. Molti studenti considerano la carta di credito come il passaporto istantaneo per uno standard di vita più alto. Non sono stupidi: sanno benissimo che dovranno pagare un interesse sul saldo scoperto della carta, ma sanno anche che li aspetta una vita lunga e che senz'altro faranno un sacco di soldi. E allora perché preoccuparsi?

Non sono solo gli studenti, comunque, a ricevere queste offerte. Controllate le vostre e-mail e la cassetta delle lettere. Ci sono buone probabilità che anche voi siate stati inondati di proposte per richiedere una carta di credito; la sola differenza è che, se non siete studenti, per allettarvi non vi offriranno un iPod, ma dei punti-premio o dei voli omaggio.

Le carte di credito, opportunamente usate, sono strumenti meravigliosi. È molto più conveniente pagare con la carta che in contanti; è molto più semplice riempire mensilmente un unico assegno per l'ente che l'ha emessa, invece di un sacco di assegni diversi. Si risparmiano tempo e spese di spedizione. Eppure le carte di credito hanno un lato oscuro, e la maggior parte delle persone ne sono consapevoli. Se avete fatto il passo più lungo della gamba e non riuscite a pagare tutta la somma dovuta, l'interesse sullo scoperto, insieme ad altre penali, può diventare esorbitante. Roba da fare invidia a Shylock e alla mafia.

Al momento, i tassi di interesse sono relativamente bassi e il mio conto in banca relativamente alto. Ho appena ricevuto per posta la pubblicità di una carta di credito. Diamo un'occhiata ad alcune delle clausole fondamentali. Se riceverete inviti del genere, le clausole che troverete saranno simili a queste[2]:

- Tasso percentuale annuo sugli acquisti: 8,99%. Immagino che i proponenti pensino che non ci accorgeremo che in realtà è del 9%. La buona notizia è che, se rimborsate l'intera somma dovuta entro la moratoria (per questa carta, entro 25 giorni dalla scadenza), non riceverete nessuna sanzione per lo scoperto. Se non versate l'intero importo, però, vi verrà conteggiato un interesse. L'ammontare dipende dal metodo di calcolo del saldo scoperto.
- Metodo di calcolo del saldo. Questa voce si riferisce al modo in cui viene calcolato l'interesse dovuto. Molte carte lo fanno pagare sul saldo corrente. Per fare un esempio, se dovete 500 dollari e ne pagate 400, sarebbe giusto calcolare quell'esorbitante tasso di interesse sul saldo scoperto di 100. Non accade così con il metodo di saldo corrente: dovrete pagarlo su tutti i 500 dollari. La carta che mi è stata spedita utilizza il metodo di saldo medio a doppio ciclo: viene calcolato il saldo giornaliero medio su due periodi di fatturazione, e su quell'importo va pagato l'interesse.
- Penali sui ritardi e sul superamento del limite di credito. Questa carta addebita 19 dollari per un ritardo sul rimborso di un saldo inferiore a 200, e 39 se il saldo supera i 200. Attenzione, c'è una penale di 39 dollari anche se si supera il limite di credito. Ma ecco la vera clausola-capestro: se c'è un ritardo nei pagamenti o si supera il limite di credito, l'ente emettitore ha il diritto di aumentare il tasso annuale fino a un valore massimo stabilito, che per questa carta ammonta al *prime rate* del + 25%! Naturalmente, l'ente emettitore non lo applicherà la prima volta che ritardate un pagamento o sforate il limite di credito: vuole continuare ad avervi come

cliente e ci sono buone probabilità che, se vi addebitasse quel tasso punitivo, voi versereste l'importo dovuto e annullereste la carta o semplicemente non ve ne servireste più. Se, però, risulterete inadempienti per un paio di volte, potreste ritrovarvi in grossi guai, e potreste impiegare anni per uscirne.

Come ultima cosa, ma non meno importante, il vostro comportamento con la carta di credito influirà molto sul trattamento che riceverete quando chiederete un prestito per acquistare un'automobile o una casa.

Quindi, qual è la morale? Assicuratevi sempre di poter pagare il conto della vostra carta. Non pagate mai in ritardo. Non superate il limite. Se dovete effettuare un rimborso minimo[3], limitate per quanto possibile l'uso della carta di credito nel corso del successivo ciclo di fatturazione.

Mia moglie Linda con le carte di credito è un genio. Ne abbiamo diverse, e lei sa quanto addebitano, quando scadono i pagamenti e quando conviene cambiare carta per approfittare dei vantaggi che occasionalmente vengono offerti in un determinato periodo per attirare nuovi clienti o indurre i vecchi a servirsi più spesso del loro prodotto.

Avere più di una carta di credito può essere vantaggioso anche da altri punti di vista. Considerate l'esempio precedente: avete accumulato 500 dollari in addebiti mensili, ma siete riusciti a pagarne solamente 400. Qualora aveste avuto cinque carte di credito diverse (ricordate che è solo un esempio, noi ne abbiamo tre o quattro e non so quale sia la media americana) e aveste accumulato 100 dollari di debito su ognuna di esse, avreste potuto saldarne quattro, pagando una penale solo su $100, invece che su 500, e potreste scegliere di utilizzare il pagamento rateale con il rimborso minimo sulla carta che è più conveniente.

Per finire, potreste addirittura guadagnare un po' di soldi con le carte di credito! Spesso gli enti emettitori prevedono la possibilità di ottenere un anticipo di contante, ma il più delle volte addebitano una commissione per questo servizio. Qualche volta, però (molto raramente), lo offrono gratuitamente. In questo caso, prelevate la somma massima consentita e usatela per acquistare dei titoli a breve[4] dalla vostra banca (o versatela su un conto fruttifero, che è più o meno lo stesso) e semplicemente restituite il prestito alla fatturazione successiva. Per esempio, se la vostra carta vi concede di prelevare 1000 dollari e di tenerveli per un mese, se li investite al 3% annuo vi frutteranno $2,50. Potete pagarci un cappuccino. Approfittare dell'ente che ha emesso la carta non ha prezzo.

Come la matematica può aiutarvi nell'acquisto di una casa

Per la maggior parte delle persone, la decisione finanziaria più importante che dovranno mai prendere riguarda l'acquisto di una casa. Una casa può fornire tre tipi di riparo: materiale, emotivo e finanziario. Molte giovani coppie ne acquistano una, ci vivono mentre i figli crescono e si ritrovano ad aver finito di pagarla quando questi se ne vanno ad abitare altrove. Come risultato, possono campare comodamente con la pensione e la previdenza sociale senza doversi preoccupare delle rate del mutuo. Una casa è una risorsa finanziaria importante, che permette alla generazione presente di assicurare una vita migliore a quella che verrà.

Ne consegue che in molti impegnano duramente le proprie finanze per riuscire ad acquistarla, spronati dai tanti settori produttivi che gravitano intorno a essa: le agenzie immobiliari, l'edilizia, le assicurazioni, per nominarne solo alcuni. Per qualcuno questa decisione si rivela il primo importante passo verso l'indipendenza finanziaria. Per altri, però, acquistare una casa può avere esiti disastrosi;

e quando sono in troppi a prendere disastrose decisioni finanziarie in questo campo, l'intera economia può soffrirne, come è successo con la catastrofe dei mutui *subprime*. Ne esaminerò le ripercussioni economiche più dettagliatamente nel capitolo 10.

Il grande mito del rifinanziamento

Ogni qualvolta i tassi di interesse diminuiscono, siate certi che riceverete un vastissimo assortimento di offerte per rifinanziare il vostro prestito. Qualsiasi tipo di prestito. Proprio ieri, quando sono andato in banca per depositare un assegno, tutti i bancari portavano una spilletta con su scritto: «Rifinanzia adesso! Chiedimi come!». Gli istituti di credito desiderano che accettiate un rifinanziamento, e quando i tassi di interesse diminuiscono, possono offrirvi dei pacchetti all'apparenza allettanti. Eppure in questo caso l'apparenza inganna. Vediamo perché.

Supponiamo che stiate comprando casa. Desiderate prendere un prestito a un tasso di interesse basso o alto? Domanda stupida, no? È chiaro che vi piacerebbe ottenere il prestito a un basso tasso di interesse perché i pagamenti futuri saranno più bassi. Perciò se oggi ottenete un prestito e domani il tasso di interesse scende notevolmente, non desiderereste prendervi a calci per non avere aspettato un giorno in più e avere ottenuto la somma a un tasso più basso? Naturalmente sì.

Ma c'è differenza se l'interesse diminuirà fra un anno o fra tre anni? La risposta ovviamente è no. Se, in un qualunque momento, il tasso di interesse diminuirà rispetto a quello a cui in origine avete ottenuto il finanziamento, vi troverete costretti a una serie di futuri pagamenti a un tasso di interesse maggiore di quello prevalente al momento sul mercato. Potrà farvi piacere? No, è chiaro.

Quello che l'industria del rifinanziamento fa è un gioco di abilità matematico. Quando i tassi diminuiscono, è possibile rifinanziare in modo che il totale dei vostri pagamenti sia inferiore di quello previsto dall'accordo originario e il debito venga estinto più in fretta. Il gioco di abilità consiste nel convincervi che si tratti di due aspetti vantaggiosi: vi escono di tasca meno soldi ed entrate prima in possesso della casa. Tecnicamente non si tratta di una frode (e questo è il motivo per cui non ho intitolato il paragrafo *La grande truffa del rifinanziamento*), ma ogni tentativo di convincere la gente che c'è un vantaggio quando non è vero, va considerato con occhio critico.

Esaminiamo una tipica proposta di rifinanziamento.

Supponiamo che cinque anni fa, quando i tassi di interesse erano del 6%, la banca vi abbia concesso un prestito di 500.000 dollari per l'acquisto di una casa (era questo più o meno il prezzo medio di un immobile a Los Angeles agli inizi del 2007), estinguibile in 360 rate mensili (il classico mutuo trentennale) da $2997,75. Sono passati cinque anni e voi avete già pagato 60 rate, totalizzando quasi 180.000 dollari. La maggior parte di questi pagamenti sono serviti a coprire gli interessi; solo $34.720,03 sono stati necessari per ridurre la somma capitale. Di conseguenza, dovete ancora $465.271,97. I 300 pagamenti rimanenti ammontano a una spesa leggermente inferiore a 900.000 dollari. Mettiamo, però, che i tassi di interesse siano scesi al 4,8%. Se desideraste alzare la vostra rata mensile a $3019,42, potreste restituire il prestito in 20 anni invece di 25, per una somma totale di $714.660. Grazie al miracolo del rifinanziamento e al fatto che i tassi di interesse sono diminuiti, potreste risparmiare alla fine quasi $175.000. È o non è un ottimo affare?

Potrebbe essere davvero una buona mossa per voi quella di ottenere un rifinanziamento, ma dovete capire un fatto molto importante: non state "risparmiando" 175.000 dollari, state pagando 175.000 dollari in meno. Potrebbe sembrare suppergiù la stessa cosa, ma c'è una fondamentale differenza, e per capire appieno cosa succede, dobbiamo ancora una volta calcolare il valore attuale.

Se lo calcoliamo sul prestito originario (360 rate mensili di $2.997,75), preparatevi a una sorpresa poco piacevole. Cinque anni fa avete preso in prestito 500.000 dollari e in questi cinque anni ne avete pagati alla banca quasi 180.000. Vi restano 300 rate da pagare e il valore attuale di quei pagamenti al tasso di interesse prevalente del 4,8% è di $523.170! Se vi capitasse la fortuna di vincere la lotteria o vi morisse un parente ricco e vi lasciasse un sacco di soldi, e se decideste di seguire la strada che richiedesse la fatica minore depositando in banca una cospicua somma di denaro per pagare le rate rimanenti, dovreste depositare $523.170. Quel mezzo milione abbondante se ne starebbe lì a raccogliere un interesse del 4,8% e alla scadenza di ogni rata verrebbe emesso un assegno prelevato dal conto di $2997,75. Finalmente, 300 rate dopo, la somma di $523.170 si sarebbe completamente estinta.

Per fortuna, dato che probabilmente non avete vinto la lotteria, c'è un'alternativa: il rifinanziamento. Ricordate che se decideste di saldare adesso il vostro debito, dovreste pagare solo $465.271,97, perché già avete rimborsato una parte del capitale. Ma esistono delle società che estingueranno il mutuo al posto vostro e poi vi faranno un prestito per quella somma (più o meno, perché spesso c'è una prima quota di rimborso) al tasso prevalente del 4,8%. Di conseguenza, potrete mettere insieme il valore di venti anni di rate mensili da $3019,42 ed estinguere il mutuo! Non è magia: è il modo in cui funziona l'interesse composto. Naturalmente, potreste anche decidere di pagare la somma rimanente in venticinque anni, abbassando notevolmente le rate mensili.

A questo punto, se siete un po' cinici, potreste chiedervi: cosa ci guadagna la banca? C'è un motivo per cui i bancari che sono addetti ai prestiti se ne vanno in giro con le loro spillette. Ogni volta che la banca muove del denaro, lo fa fruttare. Un modo per farlo è addebitarvi subito una spesa per essersi occupata del rifinanziamento; ciò nonostante, voi potrete comunque pagare alla fine una somma totale molto più bassa. Non è una truffa, e potrebbe essere davvero una soluzione conveniente. Ma non crediate che i soldi crescano sugli alberi e che la diminuzione dei tassi di interesse sia per voi una miniera d'oro, perché in realtà è vero il contrario. Se i tassi di interesse aumentano dopo che avete ottenuto un prestito, il valore attuale dei pagamenti che restano sarà inferiore al saldo non versato del prestito. Stando così le cose, potreste fare una fortuna, specie qualora i prezzi delle case dovessero salire (ricordate i giorni meravigliosi in cui ciò era dato per scontato?). Potreste rivendervi la casa e intascare l'ammontare derivato dalla rivalutazione dell'immobile.

La catastrofe dei mutui *subprime*

L'industria edile non può costruire case se non c'è chi le compra. Quando la scorta dei buoni compratori (quelli con un conto in attivo cospicuo e una storia creditizia positiva) è finita e ci sono giacenze da smaltire, verrà fatto credito a chi ha possibilità medie o ancor peggiori.

Quando un'agenzia di credito, come una banca, presta soldi a una persona con precedenti non proprio esemplari, c'è ovviamente una probabilità più alta che il cliente non riesca a stare in regola con i pagamenti. Alla banca interessa soltanto la somma totale dei soldi riscossi sui prestiti effettuati, quindi, per riuscire a compensare gli insolventi, alzerà i tassi a tutti per riscuotere interessi maggiori da un numero minore di clienti che possono pagare davvero. Così facendo, il problema risulta esasperato, perché un debitore che sarebbe stato appena in grado di pagare con i tassi prevalenti potrebbe non riuscire a far fronte a quelli più alti.

Nel 2008, gli Stati Uniti hanno sofferto degli effetti economici di un eccesso di prestiti *subprime*. I buoni compratori (i cosiddetti "*primo buyers*") sono coloro che, grazie ai loro precedenti creditizi, ottengono il tasso migliore sui prestiti. Agli altri, i compratori *subprime*, vengono imposti tassi maggiori.

Il desiderio di partecipare al sogno americano – una casa di proprietà – è altrettanto forte in chi ha possibilità economiche inferiori. Eppure, quando ai potenziali compratori vengono presentati i costi delle rate del mutuo a tassi di interesse così alti, molti si rendono conto semplicemente di non farcela. Le banche allora hanno dovuto cercare il modo per indurre i compratori *subprime* a concludere l'affare. Di conseguenza, ai potenziali clienti sono state fatte due diverse offerte.

La trappola del tasso agevolato

Alcuni clienti vengono indotti a comprare casa tramite l'offerta di un "tasso agevolato", ovvero tassi di interesse molto al di sotto di quelli di mercato; ad esempio, per i primi due anni potrebbe essere offerto un tasso agevolato dell'1%, quando quelli effettivi sono del 6%. Di conseguenza, nel primo biennio i pagamenti saranno abbastanza modesti; con un tasso agevolato fisso dell'1% su un prestito di $500.000, le rate iniziali saranno nell'ordine dei $1600 mensili. Alla fine del periodo con il tasso agevolato, però, il prestito torna a essere soggetto alle condizioni standard di un mutuo *subprime*, con rate considerevolmente più alte. Per i molti che riuscivano appena a far fronte al tasso agevolato, il *subprime* si rivelerà impraticabile. Sebbene un gran numero di clienti ne fosse consapevole – e le banche certamente lo erano –, tutti pensavano che alla fine in qualche modo se la sarebbero cavata. Alcuni probabilmente credevano che i pagamenti effettuati avrebbero aumentato il valore dell'immobile, permettendo loro di ottenere un rifinanziamento o di uscire da quella situazione grazie al maggior valore della proprietà. Ma se avessero fatto ricorso alla matematica, avrebbero capito che si trattava di un grave errore.

Supponiamo di aver ottenuto un prestito di 500.000 dollari e di doverlo restituire a un tasso del 6% in rate mensili. Come abbiamo visto, questo può accadere in 30 anni con rate mensili da $2997,75. Ma ogni mese è necessario effettuare un pagamento degli interessi che ammonta a metà dell'1% dei $500.000, cioè a $2500. Quindi, se paghiamo rate inferiori a $2500, non solo non estingueremo *mai* il prestito, ma il saldo aumenterà: è uno dei motivi per cui i tassi agevolati possono essere applicati solo per un periodo limitato, di solito uno o due anni. Di conseguenza, persone che a malapena erano in grado di pagare con il tasso agevolato si ritrovano, alla sua scadenza, a dover versare ogni mese il doppio o anche di più.

E le banche? Potremmo pensare che escludano semplicemente la facoltà di riscattare l'ipoteca e rivendano le case. Quando un compratore è inadempiente, però, la banca deve affrontare il fatto di aver ricevuto un interesse inadeguato sul suo prestito finché era in vigore il tasso agevolato, anche se alla fine otterrà comunque un modesto rendimento. Inoltre, gli istituti di credito possono approfittare del fatto che, dopo il pagamento di alcune rate, il prestito possa essere "riconfezionato" e venduto. Di contro, tuttavia, c'è il fatto che il crollo del mercato immobiliare potrebbe lasciare la banca con un prestito di $500.000 su una casa che al presente ne vale solo 400.000. Non è una bella prospettiva, né per il cliente, né per la banca.

La trappola del mutuo a tasso variabile

Un mutuo a tasso variabile è in parte simile a quello agevolato, dato che i pagamenti iniziali del cliente sono a un tasso più basso di quello prevalente. Con un mutuo a tasso fisso, le rate mensili restano uguali, a prescindere dal fatto che i tassi di interesse prevalenti aumentino o diminuiscano. Con un mutuo a tasso variabile, i pagamenti mensili del mutuo possono fluttuare a seconda di quelli vigenti. Questa può essere una cosa positiva quando i tassi diminuiscono, ma se aumentano può rivelarsi un disastro. Come abbiamo visto in precedenza, i clienti *subprime* spesso riescono a malapena a pagare la rata, e un aumento dei tassi di interesse prevalenti può spingerli nel baratro.

Un mutuo a tasso variabile può essere sicuramente una buona idea, dato che il tasso iniziale è più basso di quello fisso. Chi acquista una casa avendo la certezza che il proprio reddito aumenterà in modo cospicuo in un breve arco tempo, potrà trarre vantaggio da tassi inizialmente più bassi, sapendo che in seguito potrà affrontare quelli più alti grazie a maggiori entrate. Anche chi è in grado di prevedere con certezza che i tassi di interesse resteranno gli stessi o diminuiranno può trarre vantaggio dal tasso variabile, sebbene farebbe probabilmente meglio a servirsi di questa conoscenza per trarne profitto attraverso i *futures*[5] sui tassi di interesse nel mercato delle materie prime.

Il consiglio in genere è di scegliere il mutuo a tasso fisso, se avete intenzione di abitare nella vostra casa per almeno cinque anni. Se invece pensate di tenerla solo per un anno o due, allora vi conviene scegliere il mutuo a tasso variabile, perché all'inizio i tassi di interesse sono più bassi rispetto a quelli del mutuo a tasso fisso. Ha l'aria di essere un buon consiglio, ma funziona solo se riuscirete a realizzare il progetto di rivendere la casa. Se invece, per una ragione qualunque, sarete costretti a tenervela, potreste avere una brutta sorpresa, specie se i tassi di interesse inizieranno a salire rapidamente. È un azzardo: il più delle volte si vince, ma quando si perde, la sconfitta può avere conseguenze disastrose.

Comprare e rivendere casa per guadagnarci

Una casa può essere comprata e rivenduta in fretta, ricavandone un profitto in tempi brevi. Ci sono due modi per farlo, ma solo uno prevede finanziamenti. Trovate una casa che ha bisogno solo di leggere migliorie e fatele da soli (o pagate qualcuno perché le faccia). Poi vendetela. Alcuni miglioramenti apportati potranno aumentare il valore della casa al di là del costo dei lavori. Un esempio? Decorazioni che ne migliorino l'estetica; l'aggiunta di una stanza o la costruzione di una piscina richiedono un impegno maggiore, ma rientrano nella stessa categoria.

Per lo più chi compra una casa per rivenderla fa affidamento sulla convinzione, generalmente fondata, che il valore degli immobili cresca più in fretta dell'inflazione.

Questo è vero in particolare per le zone più "esclusive": quartieri alla moda o località ricercate per altri motivi, come la vicinanza del mare. A volte un immobile acquista valore molto in fretta e chi lo compra e poi lo rivende non solo ci guadagna, ma passa anche per un genio. Non ci vuole molto per lanciarsi in quest'attività: bisogna avere i soldi per la caparra, un credito attivo ragionevole, e abbastanza denaro per pagare le rate un paio di anni (chi fa questo investimento di solito non tiene l'immobile per un periodo più lungo); i risultati possono essere stupefacenti. Spesso una caparra del 10% basterà per comprare una casa: se la acquistate a 300.000 dollari e ottenete un tasso agevolato del 2%, per dodici mesi le rate mensili ammonteranno a $1000. Affittatela per un anno, vendetela quando il prezzo sale a $350.000 e nel giro di dodici mesi avrete guadagnato molto più del 100% rispetto al prezzo iniziale. Continuate a farlo per molti anni, e vi sarete sistemati.

Il problema si presenta quando il prezzo degli immobili si blocca, o peggio ancora diminuisce. Dovrete comunque fare fronte ai pagamenti, perché in caso contrario incorrerete in un temibile pignoramento. Chi incappa in questi periodi può finire così al verde da dover dichiarare bancarotta. Per fortuna è storicamente dimostrato che non si tratta mai di fasi lunghe. Quindi, se vi cimentate nella compravendita di immobili, avete buone possibilità di fare soldi, ma se capitate in un brutto periodo, vi troverete in un mare di guai.

Per la maggioranza delle persone, però, la scommessa dell'acquisto di una casa andrà a buon fine, garantendo loro un posto dove abitare per molto tempo e una sicurezza per la seconda parte della loro vita. Compratela con intelligenza: ottenete un mutuo a tasso fisso che potete permettervi di pagare, e avrete compiuto un passo importantissimo verso la realizzazione del sogno americano. Non è un caso che quasi il 70% dei cittadini statunitensi possieda la casa dove vive e che gli USA siano uno dei Paesi più ricchi al mondo.

Conviene comprare un'auto ibrida?

Ci sono molte decisioni meno importanti dell'acquisto di una casa che possono essere prese in modo più intelligente e ricavandone maggior profitto semplicemente servendosi della matematica. All'inizio del 2008, il prezzo della benzina si stava rapidamente avvicinando a 5 dollari al gallone[6] – almeno a Los Angeles – e molti erano tentati di comprare un'auto ibrida: per l'alto numero di miglia[7] che poteva percorrere con il gas, questo tipo di macchina era diventata una delle più vendute in America. Cerchiamo di capire se ha senso dal punto di vista finanziario.

Immaginiamo che possiate scegliere fra l'acquisto di un'automobile con un motore standard, che fa 30 miglia con un gallone, e una ibrida, che ne fa 50. L'ibrida costa 6000 dollari in più dell'auto con un motore normale. Ne vale la pena?

Un modo per rispondere alla domanda è calcolare quanto debba costare la benzina al gallone per rendere economicamente conveniente l'acquisto di un'ibrida. Per fare ciò, dovete sapere approssimativamente per quanto tempo terrete la macchina (dovete ammortizzare la differenza di 6000 dollari, e più a lungo la userete, più facile sarà farlo) e quante miglia percorrete all'anno. Supponiamo che desideriate tenere l'auto per un lustro e che ogni anno percorriate più o meno 12.000 miglia.

Avete cinque anni per ammortizzare i $6000 di differenza, quindi in media $1200 all'anno. Se comprate l'automobile con il motore normale, consumerete 12.000 miglia/30mpg = 400 galloni di benzina all'anno. Se acquistate l'ibrida, lo stesso calcolo dimostra che consumerete 12.000 miglia/50mpg = 240 galloni. Ciò vuol dire che, acquistandola, risparmierete 400 – 240 galloni di benzina = 160 all'anno. Perché 160 galloni valgono $1200, il prezzo di un gallone di benzina dovrà essere $1200/160 = $7,50.

In realtà ho fatto questo calcolo perché ho intenzione di percorrere con la mia prossima automobile circa 12.000 miglia all'anno e di tenerla per un lustro, e quindi ho optato per quella con il motore standard.

Questo calcolo è ciò che i matematici definiscono un'approssimazione di primo ordine, poiché esistono altri fattori, di minore importanza, che influiscono sul prezzo. Alcuni di essi sono il costo di ricarica e di sostituzione della batteria. Si tratta di costi che variano a seconda del modello della macchina, ma una batteria per un'auto ibrida costa parecchie migliaia di dollari (nel momento in cui scrivo)[8]. Può durare 100.000 miglia e anche di più. Se la batteria costa 3000 dollari per 100.000 miglia, ciò aggiunge un costo di $0,03 per miglio, o $1,50 per gallone. Calcoli del genere non hanno fatto altro che aumentare la mia riluttanza ad acquistare un'ibrida. Per quanto le ibride possano essere alla moda, al momento, economicamente parlando, non sembrano una buona scelta. Fare un po' di calcoli non fa mai male.

Torniamo a Salina

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, molte scelte fondamentali possono essere fatte semplicemente ricorrendo a un po' di aritmetica. Gli studenti di terza media di Salina del 1895 non avrebbero incontrato difficoltà nel decidere se comprare o meno un'auto ibrida, solo che loro non avrebbero acquistato macchine, ma fertilizzanti. Un produttore di fertilizzanti chiede 600 dollari in più per concimare una fattoria di 40 acri con fertilizzante arricchito, che dà una produzione di 50 staia di grano per acro, invece di quello comune, che fa fruttare 30 staia per acro. Vale la pena acquistare il fertilizzante arricchito? Esso produrrà 20 staia in più per acro, ovverosia 800 staia di grano in più per l'intera fattoria. Queste 800 staia dovrebbero procurare un reddito di almeno $600 perché il fertilizzante convenga, e ciò vuol dire che dovrebbero essere vendute a $600/800 = $0,75 a staio.

Supponete di essere un agricoltore e che fosse giunto il momento dell'aratura primaverile, e doveste decidere quale fertilizzante usare. Il raccolto non sarà sul mercato fino all'estate. Naturalmente, darete un'occhiata ai precedenti prezzi del grano e farete la vostra scelta nel modo migliore possibile basandovi su tali informazioni, ma quello che *davvero* vorreste è la garanzia di un prezzo di $0,80 a staio quando venderete il grano l'estate successiva. Benvenuti nel mercato dei *futures*: potreste essere in grado di vendere il raccolto estivo di grano a quel prezzo, anche prima di decidere che tipo di fertilizzante usare. Ciò gioverà anche al consumatore, perché in tal caso scegliereste di utilizzare il fertilizzante arricchito, per vendere più grano. Questo darà anche origine a una nuova categoria di imprenditori – gli speculatori del grano – che cercheranno di trarre profitto dalle differenze di prezzo sul mercato o prevedendo quale sarà il suo andamento. Sempre loro, assumendosi dei rischi finanziari, permetteranno all'agricoltore di vendere quell'estate l'intero raccolto di grano e di prendere una decisione che sarà anche nell'interesse del consumatore.

Forse questi sono proprio gli stessi ragionamenti che potrebbero essere stati fatti nel 2008 a favore dell'esistenza del mercato dei *futures*, inclusi quelli sul petrolio. All'epoca, il petrolio stava più o meno a $140 al barile, e furono in molti a protestare affermando che gli speculatori avevano alzato i prezzi. Lo stesso ragionamento potrebbe essere fatto per gli speculatori del grano che avevano incoraggiato l'agricoltore a produrne di più; cosa che lui aveva deciso di fare solo dopo essere ricorso alla matematica.

[1] Per approfondire il concetto di “valore attuale”, si veda *The Concise Encyclopedia of Economics*, www.econlib.org/library/Enc/PresentValue.html. Questo sito (in inglese) riporta in forma riassuntiva alcuni concetti-base dell’economia e una ricca bibliografia relativa ai testi classici di riferimento su questi argomenti.

[2] Per farsi un’idea sulle rate di una carta di credito, cfr. www.firstusa.com/cgi-bin/webcgi/webserve.cgi?pdn=pt_chase_con_2009_1 & card=CGT2 & page_type=appterms. Le banche sono obbligate per legge a dettagliare termini e costi delle carte, che spesso vengono riportati nella documentazione di sottoscrizione o via e-mail. spesso sono anche esposti nei siti on-line delle banche, e quello qui riportato è solo un esempio. Per quanto riguarda le clausole delle carte di credito applicate in italia vedi http://guide.inrosso.com/carte-di-credito/clausole-rilevanti.aspxun. Questo sito contiene anche una serie di consigli sul modo di utilizzare le carte di credito (*n.d.t.*).

[3] Alcune carte prevedono la possibilità di un pagamento rateale, con un rimborso minimo da versare mensilmente (*n.d.t.*).

[4] Titoli di credito la cui scadenza non va oltre i 12 mesi (*n.d.t.*).

[5] I *futures* sono contratti a termine standardizzati per poter essere negoziati facilmente in Borsa. il *future* è un contratto uniforme a termine su strumenti finanziari, con il quale le parti si obbligano a scambiarsi alla scadenza un certo quantitativo di determinate attività finanziarie, a un prezzo stabilito (*n.d.t.*).

[6] Il gallone americano equivale a 3,785 litri (*n.d.t*).

[7] Un miglio equivale a 1,6093 chilometri (*n.d.t.*)

[8] Il prezzo di un oggetto come la batteria di un’auto ibrida viene condizionato sia dai progressi tecnologici che dalle condizioni di mercato.

9
Far bene i conti con la matematica

Come è riuscita la statistica a prevenire il colera nella Londra del diciannovesimo secolo? • Perché il figlio di André Agassi e Steffi Graf non sarà un campione di tennis? • È più probabile incontrare un uomo alto più di 2 metri o ultracentenario?

Non posso fare a meno di cedere alla tentazione di cominciare il capitolo con la frase più famosa sulla valutazione dei dati mai pronunciata. Benjamin Disraeli, in assoluto il primo ministro più giovane della Gran Bretagna, parlava non solo per sé, ma anche per gli altri, quando disse: «Ci sono tre tipi di bugie: le bugie, le dannate bugie e le statistiche». Certo sorprende un po' sentirlo dire da un inglese, dato che i primi successi nell'analisi statistica si ebbero proprio a Londra, e solo pochi anni prima che Disraeli diventasse premier.

Snow ai tempi del colera

La parola "colera" non suscita una paura analoga alla "peste bubbonica", probabilmente perché non si trasmette così facilmente, ma è altrettanto terribile e fatale. Una caratteristica della malattia è una forte diarrea, e la morte può sopraggiungere in sole tre ore. Per fortuna, con le opportune precauzioni igieniche, può essere prevenuta, ragione per cui si tratta di una malattia potenzialmente debellata nell'America del ventunesimo secolo.

Lo stesso non poteva dirsi per la Londra del diciottesimo secolo. Nell'estate del 1854, nella capitale inglese si verificarono molti casi di contagio, e verso la fine di agosto un focolaio epidemico particolarmente virulento si sviluppò nel quartiere di Soho. A metà settembre, la malattia aveva falcidiato più di cinquecento vite. Gli scienziati del tempo credevano che fosse l'"aria malsana" il responsabile del male, ma John Snow, un medico inglese, la pensava diversamente. Egli tracciò una mappa della zona di Soho, segnando le case dove il colera si era manifestato. Con l'aiuto di questa cartina, riuscì a dimostrare che la probabile origine del contagio era una fontana a pompa su Broad Street. Anche se al tempo la teoria germinale delle malattie era ancora tutta da dimostrare, Snow riuscì a convincere il locale consiglio comunale a mettere fuori uso la fontana rimuovendone il braccio. Sebbene molti resoconti gli attribuiscano il merito di aver posto fine all'epidemia, lui stesso non ne era del tutto sicuro. Infatti scrisse:

> Non c'è dubbio che la mortalità venne molto ridotta, come ho già detto, dalla fuga della popolazione, che cominciò subito dopo lo scoppio dell'epidemia; ma gli attacchi erano a tal punto diminuiti prima che si smettesse di utilizzare l'acqua, che è impossibile decidere se il pozzo contenesse ancora il morbo del colera in uno stato attivo o se, per qualche motivo, l'acqua ne fosse stata ormai purificata.

Le indagini di Snow diedero origine alla scienza dell'epidemiologia[1]. Altrettanto importante è il fatto che esse evidenziarono il ruolo fondamentale delle deduzioni statistiche. Come Disraeli fece ironicamente notare, però, della statistica si fa spesso un cattivo uso; ciò era vero allora e forse lo è ancora di più oggi, perché nel ventunesimo secolo la capacità di raccogliere e analizzare dati è molto più elevata di quanto non fosse nel diciannovesimo. L'obiettivo di questo capitolo è presentare alcuni rudimenti di statistica, con la speranza che il lettore saprà poi determinare in quali situazioni tale scienza si potrà applicare correttamente, e in quali si tratterà invece del terzo tipo di bugia individuata da Disraeli.

I due obiettivi della statistica

Parlando in termini generali, la statistica ha due obiettivi. Il primo è riassumere dei dati in una forma facile da codificare. La maggior parte di essi si presenta come un turbinio da capogiro di informazioni qualitative e quantitative; ma, utilizzando una serie di trucchi statistici, è possibile trasmettere gran parte di quelle informazioni in modo semplice da capire.

Prendiamo in considerazione un grafico a torta. Se avessimo tutte le informazioni sul reddito delle persone fisiche degli Stati Uniti, avremmo centinaia di milioni di dati. Raggruppandoli in settori ben definiti, però, potremo costruire un grafico a torta che ci permetta di capire al primo sguardo la distribuzione indicativa del reddito: la frazione di popolazione indigente, la piccola borghesia, l'alta borghesia, i ricchi e i milionari. Naturalmente, avremo bisogno di fasce numeriche che definiscano i nostri "contenitori" ma, dopo averle individuate, il grafico a torta può comunicare immediatamente alla quasi totalità delle persone quanto hanno bisogno di sapere, o perlomeno quello che l'ideatore del grafico desidera mostrare loro attraverso una mirata scelta di contenitori.

L'altro obiettivo della statistica è servirsi di procedure di campionamento per una verifica di validità. Considerate, per esempio, uno studio statistico di importanza decisiva che ha avuto un'enorme influenza sulle abitudini di vita: la connessione fra il tabacco e le malattie polmonari, specialmente il cancro. In linea teorica, sarebbe stato necessario acquisire i dati relativi a ogni individuo, scoprire da quanto tempo e con quale intensità quella persona fosse un fumatore e determinarne l'anamnesi. Semplicemente impossibile. La statistica può fornire un quadro abbastanza completo solo esaminando un campione di fumatori e non fumatori e scoprendo se hanno avuto problemi ai polmoni. Naturalmente l'analisi statistica che ha consentito al ministro della Sanità di far inserire sui pacchetti di sigarette un avvertimento sui pericoli del fumo era molto più accurata. Spesso, però, un'indagine semplice (e, cosa non meno importante, economica) fornirà informazioni sufficienti a convincere un ricercatore che un'idea sia abbastanza importante da meritare ulteriori approfondimenti. Tale analisi può anche fornire la prova che un'idea che il ricercatore riteneva importante non lo fosse affatto, così impedendo (teoricamente) l'inutile dispendio di grosse somme di denaro.

Quanto deve essere ampio uno studio perché possa fornire prove convincenti? Dipende. Nel 1998, un'indagine su circa venti supernove di tipo Ia bastò a indurre l'ambiente scientifico – talmente conservatore che in confronto Rush Limbaugh[2] sembrerebbe un radicale convinto – che l'espansione dell'universo fosse in una fase di accelerazione. Negli ultimi dieci anni i teorici hanno fatto a gara per spiegare tale fenomeno. Le teorie del passato sono state modificate e ne sono state formulate di nuove, tutto a causa di una quantità di dati relativamente limitata.

Le tre emme

Forse l'elemento più importante della statistica descrittiva è il numero che esprime il valore principale in una serie di dati. Qual è il reddito medio annuo di un lavoratore americano? Quali sono l'altezza media e il peso medio di un neonato? Ci sono tre modi diversi di misurare tale valore principale e iniziano tutti e tre con la lettera "m".

Il primo e senza dubbio il più importante è la "media", o media aritmetica, ottenuta addizionando tutti i numeri e dividendoli per la loro quantità. Se il peso di cinque neonati è di 3,5 – 4 – 4,5 – 3 e 4,5 kg, allora la loro media è (3,5 + 4 + 4,5 + 3 + 4,5)/5 = 3,9.

Il secondo numero in ordine di importanza è la "mediana". Questa svolge la stessa funzione di un'aiuola spartitraffico su un'autostrada, cioè dividere in due parti uguali: è il numero centrale. Se dovessimo disporre i pesi dei neonati suddetti in ordine crescente, avremmo: 3 – 3,5 – 4 – 4,5 – 4,5. Perciò, la mediana è 4, il numero al centro, dato che ci sono due numeri minori o uguali a esso (3 e 3,5) e due numeri maggiori o uguali a esso (i due 4,5).

Be', è il numero centrale finché ci troviamo in una serie di dati in quantità dispari, come nell'esempio precedente. Se la quantità è pari, sarà la media dei due numeri centrali. Se ai dati precedenti viene aggiunto 3,5 e vengono disposti in ordine crescente, otteniamo: 3 – 3,5 – 3,5 – 4 – 4,5 – 4,5. La mediana allora sarà la media dei due numeri centrali, il secondo 3,5 e 4. Quindi la mediana in questo caso è 3,75.

Il motivo per cui la mediana è molto meno utile della media è che matematicamente è ben più difficile arrivare a delle formule quando una quantità viene calcolata servendosi di metodi diversi, a seconda che si abbia a che fare con un numero dispari o pari di dati.

L'ultima di queste tre misure principali, la "moda", è il numero o i numeri che si ripetono con maggior frequenza. Nell'esempio dei pesi dei cinque neonati, la moda è 4,5; nell'esempio dei pesi dei sei neonati, la moda consiste di due numeri: 3,5 e 4,5. La moda è la "peggiore" di queste tre misure per una serie di ragioni. Può non essere un solo numero, e anche se lo è, può non essere il valore centrale di una serie di dati. Nell'esempio dei cinque pesi, la moda è 4,5 e chiaramente non si tratta in alcun modo del valore centrale. Se, però, un banchista si vuole assicurare di non sprecare dello spazio su una mensola esponendo il tipo sbagliato di sottaceti, non calcolerà la media né la mediana del peso dei sottaceti venduti, bensì il tipo più frequente (la moda) dei sottaceti acquistati. La moda è molto utile quando i dati, come i vari tipi di sottaceti, non possono essere ordinati in una scala numerica.

Siamo solo dei principianti, da un punto di vista statistico, e già possiamo individuare uno dei motivi della frustrazione di Disraeli. Ci si può fare un quadro parecchio diverso a seconda che si scelga di utilizzare la media o la mediana. In un certo periodo, i prezzi del petrolio erano altissimi e il Paese con il più alto reddito "medio" annuale al mondo era un piccolo sceiccato del Medio Oriente. Immagino che il reddito "mediano" annuo di quello sceiccato, probabilmente, non si avvicinasse neanche lontanamente alla cifra riportata come reddito "medio" – perlomeno non se mi sono fatto un quadro corretto di quel posto: pochi signori del petrolio ricchissimi che se la spassavano nei loro palazzi, mentre la vasta maggioranza dei lavoratori sottopagati sudava per tirare fuori il greggio dal suolo. In ogni caso, possiamo immaginare un Paese ipotetico con uno sceicco, che possiede un reddito annuo di $100.000.000, e 99 lavoratori che ne percepiscono $10.000. La media annua è poco più di $1.000.000, ma la mediana è di $10.000.

C'è un libro fantastico di Darrell Huff e Irving Geis, intitolato *Mentire con le statistiche*[3], che approfondisce esaurientemente tali argomenti. In ogni caso, questo semplice esempio dimostra che bisogna essere molto cauti quando si hanno di fronte dati statistici, per assicurarsi di sapere davvero cosa rappresentino, e conclusioni statistiche, sulle quali torneremo più in dettaglio nel corso del capitolo.

Regressione verso la media

Se giocate a golf, ricorderete senz'altro il vostro miglior giro di buche. Avete tenuto la palla in *fairway*, evitato bunker di sabbia e ostacoli d'acqua, e perfino imbucato con pochi *putt*. Ormai credevate di essere diventati dei campioni, ma quasi sicuramente, quando siete tornati a giocare, avete scoperto di essere ancora i golfisti di sempre: avete fatto schizzare la palla dappertutto e mancato dei *putt* corti. È stato appena sperimentato un fenomeno noto come "regressione verso la media". Il vostro normale punteggio a golf è la vostra media e i punteggi insoliti – buoni o cattivi – vengono spesso seguiti da performance nella norma. I punteggi insoliti ritornano, o "regrediscono" verso la media consueta.

In molte delle attività cui mi dedico, il divertimento che ne traggo supera di gran lunga la bravura, prime fra tutte il pianoforte e il tennis. Mi piace anche ascoltare un grande pianista o guardare giocare dei tennisti eccezionali, e due dei migliori di questi tempi, André Agassi e Steffi Graf, alcuni anni fa sono convolati a nozze. Come spesso accade in questi casi, hanno avuto dei figli e subito è partito il dibattito per capire se, considerati i genitori, avrebbero potuto avere la stoffa di uno dei più grandi giocatori di tutti i tempi.

Posso dire in tutta sicurezza che ciò non accadrà. In generale, i figli di due persone che possiedono entrambe una caratteristica insolita, quali possono essere un talento o un'intelligenza spiccati, non li possiederanno in eguale misura. Questo sembra sfidare la genetica, che spiega come dei tratti distintivi vengano trasmessi alla propria progenie, ma qui è in atto una forza perfino maggiore: la regressione verso la media. Le misurazioni successive di valori che in origine si discostavano molto dalla media, come il vostro miglior giro di buche a golf, tenderanno a riavvicinarsi a essa. Date un'occhiata alle medie di battuta[4] alla fine del 2009 dei dieci migliori giocatori di baseball del 2008; quasi certamente si saranno abbassate, "regredendo", o avvicinandosi, verso la media.

Tale fenomeno venne esteso per la prima volta al campo della genetica da Sir Francis Galton nel diciannovesimo secolo, che lo analizzò nel suo articolo *Regression towards Mediocrity in Hereditary Stature* ("Regressione verso la mediocrità della statura ereditaria")[5]. Galton studiò il fatto che i figli di genitori alti tendessero a essere più bassi di loro; similmente, i figli di genitori bassi tendevano a essere più alti di questi.

La regressione verso la media ha importanti conseguenze sulla pianificazione delle ricerche statistiche. Sono avanti con gli anni e il cancro, di vario tipo, rappresenta indubbiamente per me una preoccupazione. Di conseguenza, tendo a notare sui giornali gli articoli che trattano dell'efficacia di questa o quella cura, perché se lì fuori c'è in giro una pallottola con su scritto il mio nome, voglio sapere quali sono i migliori rimedi disponibili. Soprattutto diffido del modo in cui vengono concepiti gli esperimenti atti a dimostrare l'efficacia di tali cure. La regressione verso la media, infatti, può essere alla base di gran parte del successo di una cura, se l'esperimento è mal concepito.

Per spiegarlo, immaginiamo che venga testata l'efficacia di un nuovo farmaco per il cancro al pancreas. Mille persone affette da questa malattia vengono sottoposte a esami diagnostici, e la gravità della malattia viene quantificata. Al 10% dei pazienti nelle condizioni più gravi, che più degli altri hanno un disperato bisogno di miglioramento, viene somministrato il nuovo medicinale. La regressione verso la media farà sì che i nuovi esami rivelino quasi certamente un complessivo miglioramento della malattia (in relazione al "paziente medio" oggetto di studio) in coloro cui è stato somministrato il nuovo farmaco, anche se non fosse altro che un estratto di cheeseburger al bacon. Questo semplicemente perché i valori estremi in statistica sono poco attendibili: è probabile che i punteggi medi dei cinque golfisti che hanno giocato peggio nel primo round di un torneo saliranno nel secondo round. Com'è ovvio, un esperimento ben congegnato utilizzerà due gruppi di soggetti. Ogni gruppo sarà formato di individui affetti da cancro al pancreas scelti con criterio casuale: a uno verrà somministrato il nuovo farmaco e a un altro quello comunemente utilizzato, o un placebo. Idealmente, lo studio dovrebbe essere "in doppio cieco"; i soggetti non dovrebbero sapere se stanno ricevendo un nuovo farmaco o uno usato di norma, e i dottori che somministrano i medicinali non dovrebbero sapere quale stanno ricevendo i pazienti.

Come la statistica mi ha reso immortale

Sappiamo tutti che probabilmente l'immortalità fisica non sarà mai conquistata dagli esseri umani, quindi ci restano due strade per ottenerla: la nostra progenie o il raggiungimento di qualche memorabile risultato. La matematica e la scienza di solito riconoscono il merito, quando c'è; ne è una prova il fatto che la dimostrazione secondo cui il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti sarà per sempre nota come "teorema di Pitagora".

Non ho mai compiuto alcuna ricerca statistica, anche se in una piccola rivista appare una mia nota di carattere pedagogico su tale materia. Eppure, grazie a una combinazione straordinaria di eventi, quello che è stato definito il più noto risultato di statistica degli ultimi cinquant'anni porta anche il mio nome, nonostante il fatto che io non abbia avuto assolutamente nulla a che fare con esso. Oltre a ciò, sono probabilmente l'unico matematico o scienziato nella storia della matematica o delle scienze ad avere ottenuto un simile risultato in questo modo, sebbene non possa esserne del tutto sicuro.

Uno degli elementi fondamentali del mondo dello spettacolo è il finale a sorpresa: siamo portati a credere che il playboy figlio della ricca signora abbia assassinato la madre, quando in realtà è stato il maggiordomo. O viceversa. L'equivalente in matematica o nelle scienze è il risultato controintuitivo, ovvero quando le nostre intuizioni ci portano fuori strada. Ne abbiamo già esaminato un esempio a proposito dello scambio di porte che veniva proposto in un gioco televisivo.

Sono stato un appassionato abbonato della rivista «Scientific American» per quasi quarant'anni. Di quando in quando, su «Scientific American» appare un articolo di matematica, e nel 1977 ne fu pubblicato uno interessantissimo riguardante sia la regressione verso la media sia la previsione statistica del futuro. L'articolo descriveva il tentativo di predire la media di battuta di diciotto giocatori a fine stagione, utilizzando le loro medie dopo quarantacinque turni in battuta: un modo comune di predire le medie future. La cosa ovvia da fare è considerare la media di battuta dopo quarantacinque volte e predire la stessa alla fine della stagione. L'articolo spiegava che c'era un modo migliore per farlo, servendosi della tendenza alla regressione verso la media. Per analogia con i punteggi medi dei golfisti peggiori di cui si è parlato prima, i giocatori che risultano i migliori battitori dopo quarantacinque volte probabilmente finiranno la stagione con delle medie più basse. I fan del baseball lo sanno: a inizio stagione c'è qualche battitore con una percentuale di palle colpite di 0,400 (ossia 400 su 1000), ma l'ultimo a mantenere quel risultato a fine stagione fu Ted Williams nel 1941. Le basi teoriche per questo studio furono sviluppate da Charles Stein della Princeton University, uno dei più grandi statistici del ventesimo secolo.

Stein è un nome abbastanza comune, sia da solo che come suffisso. Esiste addirittura un *limerick* scritto su di noi.

> C'è un'illustre famiglia che di nome fa Stein,
> C'è Gert, e c'è Ep, e c'è Ein,
> Le poesie di Gert sono carta straccia,
> Le statue di Ep sono robaccia,
> E non c'è nessuno che capisca Ein[6].

In ogni caso, possiamo distinguere uno Stein dall'altro servendoci dei nomi di battesimo e dei secondi nomi, se necessario. Ma nella scienza e nella matematica non funziona così. Il teorema di Pitagora non è noto come teorema di Fred Pitagora, e non solo perché Pitagora non si chiamava Fred; parliamo della teoria della relatività di Einstein, non della teoria della relatività di Albert Einstein. Tutti i teoremi matematici e le scoperte scientifiche vengono designate con il cognome della persona a cui sono attribuiti. Con una eccezione, o una specie di eccezione.

Si tratta del teorema di James Stein, colonna portante dell'articolo sullo «Scientific American» a proposito delle medie del baseball. È vero, in realtà è noto come il teorema di James-Stein (perché è stato formulato da due matematici) ma, se lo si pronuncia a voce alta, il trattino non si sente. Per molti anni mi sono state chieste infinite copie di quell'articolo da parte di matematici che avrebbero dovuto saperla più lunga: dopo tutto, non esistono altri teoremi (che io sappia) che portano nome e cognome del loro scopritore. Eppure, a proposito di questo teorema, posso rivendicare un autentico diritto all'immortalità, oltre a quello fittizio che vi ho appena raccontato.

L'articolo in cui appare per la prima volta il teorema di James-Stein venne pubblicato nel 1961 ed era firmato da W. James e C. Stein[7]. Naturalmente tutti sapevano chi fosse C. Stein: Charles Stein, di Princeton. Nessuno sapeva chi fosse W. James: dopo essere passato come una meteora nel firmamento della statistica, in apparenza era scomparso nel nulla. Come vedrete, io contribuii a scoprirne l'identità, sebbene – e vedrete anche questo – non fu difficile.

Il teorema di James-Stein fu il fulcro di un intervento tenuto da Carl Morris, uno degli autori dell'articolo dello «Scientific American» durante un incontro della American Statistical Association a Los Angeles. Ecco il racconto di Morris sul modo in cui scoprì l'identità di James[8]:

> Le luci vennero abbassate quando iniziai a illustrare la mia tesi e a introdurre Stein e la sua opera. Poi ammisi – a malincuore – che gli studiosi di statistica non sapevano chi fosse James. Un uomo di mezza età, seduto in fondo alla stanza, esclamò: «Io lo so io!». Non riuscivo a vederlo bene, ma ancora posso sentire il brivido premonitore che mi attraversò durante la strana pausa che precedette la mia domanda: «Chi è?»
>
> «Sono io».
>
> Per qualche momento portammo avanti un dialogo da un capo all'altro della sala. Turbato dalla sua comparsa, di quando in quando continuai a borbottare – perfino mentre parlavo – stupito per quell'apparizione. Il mondo della statistica finalmente ne conosceva il nome. Willard D. James al tempo era alla facoltà di matematica della California State University a Long Beach (CSU – LB). Essendo un matematico le cui ricerche statistiche si erano limitate alla collaborazione con Stein per un'estate, non aveva seguito le sorti del suo lavoro e il grosso impatto che aveva avuto. Disse al pubblico di sentirsi imbarazzato che lo stimatore scoperto da Stein fosse stato chiamato "stimatore di James-Stein", e aveva chiesto che il "James" venisse tolto per riconoscere al collega i suoi pieni meriti. Ecco in breve cosa era accaduto, come venni a sapere per lo più grazie alla lunga conversazione privata che avemmo più tardi quella sera.
>
> Solo una singolare coincidenza aveva portato all'attenzione di James il mio intervento durante quell'incontro. Della facoltà di matematica della CSU – LB faceva parte James Stein (che ancora ne fa parte) [sono io, *nda*!]. Un loro collega, letto il comunicato

dell'ASA che annunciava la conferenza nel cui titolo appariva il famigerato «James-Stein», aveva chiesto a James Stein se si trattava di un suo lavoro [anche se avrebbe dovuto saperla più lunga, come ho detto, sono felice che lo abbia fatto, *nda*]. James Stein aveva risposto di no, precisando che si trattava di un lavoro di Willard James, che si trovava nel corridoio. Così Willard James era venuto a sapere del mio intervento per l'ASA. Ed era venuto.

La curva a campana

La curva a campana può essere considerata l'immagine-simbolo della statistica. Quasi tutti ne conoscono l'aspetto: una specie di montagna simmetrica più voluminosa nella parte centrale. Quasi tutti hanno un'idea abbastanza precisa di cosa rappresenti. Molte caratteristiche – ad esempio, l'altezza – soddisfano l'andamento di una curva a campana. La grande maggioranza degli individui sono di altezza media, magari un po' più alti: solo pochissimi sono o eccezionalmente bassi o così alti da sembrare destinati a fare carriera nel basketball professionale.

L'importanza della curva a campana, cui i matematici si riferiscono come "distribuzione normale", ha due motivi. Il primo è che, considerata una serie di dati che soddisfano la curva a campana, è necessario conoscere solo due quantità per essere in grado di rispondere a ogni quesito statistico su quella serie di dati: la media, che è la misura del valore centrale della distribuzione, e la deviazione standard, che è la misura di quanto strettamente i dati siano raggruppati intorno alla media.

La formula per calcolare la deviazione standard è un po' complicata ma, più bassa è la deviazione standard, più i dati si concentrano soprattutto intorno alla media. La Svizzera e la California possiedono redditi medi molto simili, ma in California presentano tra loro maggiori differenze. Ci sono persone molto ricche (mi viene in mente un certo ex governatore, così come altre celebrità e i miliardari della Silicon Valley) e parecchie persone piuttosto povere (la California ha molti immigrati recenti). Ne consegue che i redditi nello Stato abbiano una deviazione standard maggiore che in Svizzera, poiché ci sono percentuali di persone molto ricche e molto povere più alte di quanto non avvenga in questa nazione.

Torniamo al fatto che, una volta conosciute la media e la deviazione standard di una distribuzione normale, si può rispondere a ogni domanda su quei dati. Se vi fermate a riflettere, ha dell'incredibile. Se io vi dicessi che il punteggio medio ottenuto dagli studenti a un test di matematica è 77 e poi vi chiedessi quale percentuale ha un punteggio superiore a 85, voi avreste pieno diritto di considerarla una domanda ridicola, perché semplicemente non avete informazioni a sufficienza per rispondere. Possono essere stati moltissimi i modi per ottenere un punteggio medio di 77; forse nessuno studente potrebbe aver avuto un punteggio superiore a 85, oppure potrebbe averlo ottenuto più della metà della classe. Eppure se io vi dicessi che (1) i punteggi del test soddisfano una curva a campana (2) la media dei punteggi era 77 e (3) la deviazione standard dei punteggi era 4, ognuno che abbia seguito un corso-base di statistica saprà (o potrà servirsi di una tabella e scoprirlo velocemente) che solo il 2% degli studenti ha ottenuto un punteggio maggiore di 85. Questa specificità – la capacità di rispondere a tutte le domande sulla distribuzione dei dati solo conoscendo la media e la deviazione standard – rende preziosa la curva a campana, perché vuol dire che non avrete bisogno di una quantità infinita di dati: una tabella sarà sufficiente[9].

La media e la deviazione standard possono essere calcolate per ogni serie di dati, e devo ammettere che le calcolatrici tascabili hanno reso molto più semplice farlo di quanto non fosse un tempo (con i fogli di calcolo è una passeggiata). La media e la deviazione standard costituiscono dei parametri omogenei per la misurazione dei dati. Nell'esempio precedente, un punteggio di 85 sarà 8 punti al di sopra della media di 77. Dato che la deviazione standard per quella distribuzione era di 4, 8 punti equivalgono a 2 deviazioni standard, e possiamo dire che un punteggio di 85 equivale a 2 deviazioni standard sopra la media.

Questo parametro-base rende possibile il confronto fra dati provenienti da ambiti diversi. Desiderate sapere se è più facile che incontriate qualcuno più alto di due metri o un ultracentenario? Grazie al fatto che sia l'età che l'altezza sono normalmente distribuiti, dovrete solo scoprire in quale valore (l'altezza o l'età) si trovi un maggior numero di variazioni standard al di sopra della media.

Quello che rende i parametri standard tanto utili è che possono essere utilizzati per determinare in quale percentuale la popolazione rientri in una determinata fascia. Non possiamo dire quale percentuale della popolazione abbia un'altezza compresa fra 1,80 m e 1,90 m semplicemente da queste due misure, ma se le traduciamo in numero di deviazioni standard sopra la media, potremo stabilirlo.

Quando ero studente, mi capitò di lavorare come programmatore per l'"Educational Testing Service", l'organizzazione che gestisce i test di ammissione alle università. I punteggi di tali prove sono normalmente distribuiti, tarati in modo che il punteggio medio sia di 500, e 100 punti corrispondano a una deviazione standard. In una distribuzione normale, metà dei valori si trovano sopra la media, il 16% circa al di sopra della media per più di una deviazione standard e solo il 2% per più di due deviazioni standard. Quindi la differenza fra un punteggio di 600 (una deviazione standard sopra la media) e un punteggio di 500 è considerevole – circa il 34% dei punteggi ottenuti ai test d'ingresso si trovano fra 500 e 600. La differenza di 100 punti fra 500 e 600 rappresenta quella fra uno studente medio e uno appartenente al 15% dei più bravi. La differenza fra un punteggio di 700 (due deviazioni standard sopra la media) e 600 è notevolmente minore – solo il 14% circa ricade in questa fascia, quindi in tal caso i 100 punti di differenza rappresentano il divario fra uno studente davvero bravo e uno eccezionale. La differenza fra un punteggio perfetto (800) e 700 è davvero sottile: solo il 2% dei risultati rientra in tale fascia, quindi questi 100 punti di differenza distinguono uno studente eccezionale da un vero fuoriclasse.

L'altro fattore che rende così importante la curva a campana è che esiste un numero incredibile di parametri normalmente distribuiti. Ho già menzionato l'età, l'altezza e i punteggi dei test d'ingresso, ma l'elenco è molto più lungo. In realtà c'è una ragione matematica profonda per questo, espressa da uno dei più importanti teoremi: quello del limite centrale di Carl Friedrich Gauss. L'idea di base è piuttosto semplice: anche quando la distribuzione originaria di una serie di dati è tutt'altro che normale – se si considera la distribuzione delle medie campionarie, e i campioni considerati sono abbastanza ampi –, le medie di quei campioni saranno normalmente distribuite. Quindi, se prendessimo una serie qualunque di misurazioni – come il numero di scarpe acquistate dalle persone con i capelli rossi – i dati singolarmente presi potrebbero distribuirsi in qualsiasi direzione. Per esempio, dal momento che parecchi clown hanno i capelli rossi potremmo avere un numero sorprendentemente alto di scarpe di grossa taglia, almeno se paragonati alle misure delle persone bionde. Se però considerassimo un gran numero di campioni composti da trenta persone con i capelli rossi, e per ogni campione calcolassimo la misura "media" di scarpe, e poi tracciassimo un grafico di queste medie, otterremmo una curva a campana. Varie quantità prese dal mondo reale corrispondono a un qualche tipo di media fra svariate caratteristiche, e questo fornisce una spiegazione parziale del perché prevalgano quantità normalmente distribuite.

Cosa ci vuole per convincervi?

Quando si avvicina la stagione del football non vedete l'ora che arrivi, non solo perché vi piace questo sport, ma perché vi piace scommetterci su e un vostro amico ha sviluppato un sistema che sulla carta sembra proprio buono. Parecchi sistemi sembrano funzionare in teoria perché derivano dall'analisi dei risultati passati e tocca a voi decidere quando, e se, supportare con dei soldi l'idea del vostro amico.

Sfortunatamente, il sistema prevede solo una puntata a settimana e, se continuate a testarlo troppo a lungo, la stagione sarà ormai finita. Decidete perciò di concedergli un periodo di prova di un mese, scommettendo sulle partite suggerite per quattro settimane consecutive. Il sistema prevede scommesse *against the spread*, grossomodo scommesse alla pari[10], e stabilite voi che, se il sistema risulterà vincente per quattro volte consecutive, il vostro amico avrà davvero qualcosa in mano, perché normalmente una scommessa alla pari può essere vinta per quattro volte di seguito solo 1 volta su 16, poco più del 6% delle volte.

La domanda «cosa ci vuole per convincervi?» non è fondamentale solo per la statistica. Si trova al centro del nostro sistema giudiziario, come sa chiunque abbia fatto parte di una giuria. Per condannare un imputato per un crimine con il proprio voto, bisogna essere convinti della sua colpevolezza «oltre ogni ragionevole dubbio». Ecco come spiega questo concetto alla giuria un giudice della Virginia Occidentale:

> Lo Stato non è tenuto a provare la colpevolezza oltre ogni possibile dubbio. Il banco di prova è quello del ragionevole dubbio. Un ragionevole dubbio è fondato sulla ragione e il buon senso: il tipo di dubbio che farebbe esitare nell'agire una persona raziocinante. Una prova che superi il ragionevole dubbio, quindi, dev'essere talmente convincente da rassicurare una persona raziocinante e spingerla ad agire di conseguenza[11].

È grosso modo la spiegazione che ricevetti quando venni convocato come giurato. Provenendo io da un background quantitativo, chiesi al giudice quale fosse il livello di ragionevole dubbio. Una volta su cinque? Una volta su venti? Una volta su cento? Il giudice non rispose alla mia domanda – perlomeno, non quantitativamente – e mi disse che ogni cittadino doveva deciderlo da solo.

La statistica, invece, quantifica cosa sia necessario per convincervi. Lo standard di riferimento del "livello di dubbio" è del 5%, più o meno l'equivalente della possibilità di vincere per quattro volte di seguito una scommessa alla pari. Nella gran parte degli esperimenti statistici – specie quelli relativi alle scienze sociali – un esito che si verifichi più del 5% delle volte viene considerato la dimostrazione che esista una qualche ragione nascosta diversa dal puro caso. Ad esempio, se il sistema di scommesse sul football che abbiamo visto prima si rivelasse vincente per quattro partite consecutive, ciò verrebbe considerato una solida prova statistica della sua attendibilità.

Un livello del 5% è lo "standard di riferimento" nel normale ambito delle scienze sociali, ma ovviamente ci sono situazioni in cui, per convincerci, servirà qualcosa in più. Più gravi sono le conseguenze nel caso in cui si verifichi ciò che gli statistici definiscono un "errore di primo tipo" – nell'esempio del football l'adozione di un sistema perdente – più basso dovrebbe essere il livello di "rifiuto". Sicuramente, non salireste su un aereo che avesse il 5% delle possibilità di non eseguire con successo un atterraggio[12]. Questo livello è molto più basso anche per i test statistici di una teoria di fisica: potete scommettere che gli astronomi non andrebbero in giro a dirci che l'espansione dell'universo è in una fase di accelerazione, se ci fossero solo il 95% delle probabilità che ciò sia vero.

Verifica delle ipotesi

Vediamo come lo "standard di riferimento" viene incorporato nelle procedure di verifica delle ipotesi, una delle applicazioni più importanti della statistica, con ripercussioni sulle nostre vite quotidiane. Consideriamo, per esempio, i programmi televisivi che guardiamo, o piuttosto, quelli che la televisione ci propina. Perfino mentre scrivo questo libro, uno dei telefilm preferiti di mia moglie (*Fringe*) rischia di essere cancellato, nonostante il fatto che lei e molti suoi amici ne siano avidi spettatori. Colpa della verifica delle ipotesi. I programmi televisivi vengono pagati attraverso la pubblicità, e la pubblicità è un classico esempio dell'uso del valore atteso. Un inserzionista si aspetta di avere poche probabilità di convincere uno specifico spettatore a comprare il suo prodotto, ma se riesce a procurarsi sufficiente pubblico, venderà moltissimo. L'inserzionista ha due numeri da determinare: la probabilità che uno spettatore casuale si trasformi in un compratore, e il numero degli spettatori. Può determinare la probabilità tramite l'esperienza o verifiche su piccola scala, ma avrà bisogno della statistica per stabilire se avrà pubblico a sufficienza.

Facciamo un esempio. Uno spot di un minuto costa 15.000 dollari; uno spettatore su 30 potrebbe comprare il prodotto di quell'azienda, e il profitto per ogni vendita è di 5 dollari. Il numero complessivo di spettatori nell'orario in cui è trasmesso un determinato programma all'interno del quale compare lo spot è di 1.000.000 di persone. Per andare in pari (e ovviamente l'azienda vuole ottenere di più), bisogna vendere 3000 pezzi di quel prodotto per ripagare il costo pubblicitario; e se la parte degli spettatori che lo acquisteranno è 1/30, significa che almeno 90.000 persone debbano guardare quel programma, il 9% del pubblico totale. Ma l'azienda non vuole semplicemente andare in pari, vuole anche ricavare un profitto, quindi stabilisce che il programma debba attirare almeno il 12% degli spettatori. La statistica può rispondere a questa richiesta solo con le probabilità. Gli studiosi di statistica partono da un'ipotesi fittizia che chiamano "ipotesi nulla": meno del 12% degli spettatori ha guardato il programma. Poi formulano la domanda: ci è andata bene?

Immaginiamo di mettere in un barattolo una gran quantità di palline, di cui il 12% rosse e il resto bianche. Poi estraiamone 500 alla volta, verifichiamo la quantità di palline rosse nel campione, e ripetiamo la procedura per un gran numero di volte. Poi cerchiamo il "valore critico", cioè il numero minimo di palline rosse necessarie perché solo il 5% delle volte il campione contenga quel preciso numero di palline, accettando lo "standard di riferimento" descritto in precedenza. Ho eseguito il calcolo: il 5% delle volte 72 o più palline di quelle 500 sono rosse[13]. L'azienda che investe in pubblicità dovrebbe essere tremendamente sfortunata per non ricavarne un profitto. Questo accadrebbe solo se meno del 12% del pubblico guardasse il programma *e* un campione casuale di 500 spettatori contenesse meno di 72 persone. Questa combinazione si verifica meno del 5% delle volte.

Fra l'altro, questo è un campo in cui i computer hanno dimostrato di essere davvero preziosi in molti modi diversi. Nel nostro caso, si tratta di un esempio relativamente semplice in cui la matematica è di facile comprensione, ma molti procedimenti sono così complessi che è difficile o impossibile trovare il corretto valore teorico di una certa probabilità. I computer possono servire a simulare il processo per determinare la probabilità attraverso delle prove casuali. Per fare ciò si utilizza un generatore di numeri casuali; nell'esempio precedente, il computer avrebbe generato un numero casuale fra 1 e 100; se il numero fosse stato da 1 a 12, avrebbe memorizzato il risultato come una pallina rossa; se il numero fosse stato da 13 a 100, l'avrebbe memorizzato come pallina bianca. Fatelo per 500 volte e verificate il numero totale di palline rosse. Poi ripetete il processo un milione di volte (per farlo un computer veloce ci impiegherà pochi secondi); grossomodo nel 5% dei casi si otterranno 72 palline rosse o più.

Ora passiamo dalla teoria alla prova statistica. Quelli della Nielsen[14] hanno tenuto sotto osservazione 500 famiglie in tale particolare mercato. Durante il periodo in esame, 75 di loro si sono sintonizzate su quel programma televisivo. Come si è detto in precedenza, presumendo che il 12% del pubblico guardi la trasmissione, un campione casuale di 500 spettatori mostrerà che 72 o più di loro l'hanno guardata solo il 5% delle volte. Questo è il segnale che quelli della Nielsen cercavano, e quindi si decide di acquistare uno spot durante il programma. Non c'è garanzia che così facendo si guadagneranno dei soldi, ma prendendo costantemente decisioni in questo modo, la "legge delle medie" finirà per dar loro ragione. La pubblicità, come la vita e le scommesse sportive, non è che una lunga stagione.

Indubbiamente a molti sembrerà strano che la decisione su quali programmi televisivi debbano continuare o essere cancellati dipenda grossomodo solo da 500 famiglie (quelle della Nielsen), ma è un modo economico per assicurare il successo ai pubblicitari, e il più delle volte i programmi che restano in onda sono quelli che gli americani vogliono davvero guardare.

Cos'è il "margine di errore"

Poco prima delle elezioni presidenziali del 2008, un tipico sondaggio dimostrò che Barack Obama superava John McCain con un margine del 49% contro il 43%, con un 8% dell'elettorato indeciso. Come molti annunci pubblicitari, che oggi finiscono con elaborate dichiarazioni di non assunzione di responsabilità, anche i sondaggi normalmente dicono qualcosa del genere: «Questo sondaggio ha un margine di errore di 3 punti percentuali».

Il margine di errore viene determinato suppergiù nello stesso modo in cui vengono verificate le ipotesi e generalmente ci si serve dello stesso "standard di riferimento" del 5%. Naturalmente non potevamo conoscere la percentuale dei votanti a favore di Obama fino al momento delle elezioni. Oltre a ciò, sono stati fatti molti sondaggi di cui però non conosceremo mai la vera percentuale: quando si dichiara che «il 72% degli americani, con un margine di errore di 3 punti, è d'accordo con il piano governativo per la gestione dei "titoli tossici"», non ci sarà una verifica elettorale di questa affermazione. Ciò nonostante, esiste davvero una percentuale affidabile del popolo americano nel suo complesso. Se prendessimo dei campioni casuali della stessa ampiezza di quelli considerati dal sondaggio, la percentuale del campione che preferisce Obama ricadrebbe al di fuori della fascia compresa tra il 46% e il 52% (49% più o meno 3 punti) solo il 5% delle volte.

Perché le statistiche sbagliano più di quanto dovrebbero

Nella sua essenza, la statistica è valida da un punto di vista matematico quanto la geometria, eppure in geometria non si ottengono mai risultati sbagliati mentre in statistica sì. In parte, la ragione per cui ciò avviene è inerente alla sua stessa natura: il 95% di risultati esatti, vuol dire il 5% di quelli inesatti. Quindi il 5% delle volte una rete televisiva cancellerà un programma che, secondo i criteri da lei stessa stabiliti, avrebbe dovuto continuare a trasmettere. Un nuovo, ma pericoloso, procedimento chirurgico dovrà rispettare standard più alti, ed anche se lo standard da rispettare per ottenere un parere favorevole è del 99,9%, capiterà sempre che venga approvato un procedimento che non avrebbe dovuto esserlo. Eppure la maggioranza degli errori che si verificano quando si fa ricorso alle statistiche sono dovuti a tecniche di campionamento non del tutto casuali che producono campioni "distorti". Molte delle cause si conoscono a priori. I sondaggi telefonici non sono casuali perché non tutti possiedono un telefono, e perfino fra quelli che lo possiedono, chi effettua i sondaggi contatta solo chi ha un telefono fisso, mentre oggi molte persone utilizzano esclusivamente i cellulari. I sondaggi su internet non sono casuali perché chi risponde si "autoseleziona": si imbatte cioè nel sondaggio e può decidere se rispondere o meno. Alcuni sondaggi non misurano quello che credono di misurare – o, cosa ancor più importante, quello che vogliono far credere agli altri – perché le domande sono mal formulate (di proposito o meno) o sono concepite in modo da sollecitare certe risposte. I "sondaggi promozionali" rientrano ovviamente in questa categoria. Per finire, chi partecipa a un sondaggio potrebbe non rivelare le proprie vere opinioni quando risponde alle domande. Il cosiddetto "effetto Bradley" – che prende nome da Thomas Bradley, ex sindaco di Los Angeles – venne scoperto quando questi nel 1982 perse le elezioni a governatore della California, nonostante fosse dato come favorito dai sondaggi. Si pensò che i partecipanti al sondaggio avessero detto agli intervistatori che intendevano votare per Bradley, un afro-americano, per non essere tacciati di razzismo, quando in realtà intendevano scegliere il suo avversario.

Per finire, c'è il "fenomeno picnic" (probabilmente ribattezzato così per la prima volta qui). Le previsioni del tempo sono molto accurate, specie quando riguardano al massimo l'indomani, ma noi tendiamo a ricordare meglio una previsione sbagliata quando ha piovuto un giorno in cui era previsto bel tempo e avevamo organizzato un picnic basandoci su quella aspettativa. Tutti ricordano la previsione «Dewey batte Truman»[15] e i titoli dei giornali che riportavano il risultato sbagliato, ma nessuno ricorda i sondaggi che preconizzavano l'effettiva vittoria schiacciante di Reagan.

La mia opinione riguardo alle statistiche è che, meno probabilità ci sono di un'ingerenza umana, più mi fido di quello che esse dichiarano. Mi fido molto dei risultati statistici sulle scienze naturali e l'ingegneria, nutro una discreta fiducia quando si ha a che fare con la vita o le scienze sociali, e mi fido un pochino – ma non tantissimo – quando i risultati riguardano le elezioni o le scelte di marketing. Mia moglie, però, potrebbe pensarla diversamente da me, dato che all'ultimo minuto *Fringe* è stato riconfermato.

[1] Vedi voce "colera" nel sito (in inglese) www.spiritus-temporis.com/john-snow-physician-/cholera.html. Per saperne di più vedi il sito http://www.quadernodiepidemiologia.it/epi/storia/colera.htm (*n.d.t.*).

[2] Presentatore radiofonico e opinionista americano (*n.d.t.*).

[3] D. Huff – I. Geis, *How to Lie with Statistics*, norton, new York 1957 (trad. it. *Mentire con le statistiche*, Monti & ambrosini editori, Pescara 2007) (*n.d.t.*).

[4] Nel gioco del baseball, la "media di battuta" è la statistica che descrive la percentuale di battute valide di un giocatore sul totale delle volte che è stato in battuta validamente (*n.d.t.*).

[5] «Journal of the anthropological institute», 15, 1886, pp. 246-63.

[6] *The Limerick, a Facet of Our Culture*, www.csufresno.edu/folklore/drinkingsongs/html/books-and-manuscripts/1940s/1944-the-limerick-a-facet-of-our-culture/index.htm.

[7] W. James – C. stein, *Estimation with Quadratic Loss*, in «Proceedings of the 4th Berkeley symposium on statistics and Probability», 1, 1961, pp. 361-379.

[8] P. Everson, *Stein's Paradox revisited*, in «Chance», 20, 3, 2007, pp. 49-56.

[9] Vedi *Standard Statistical Tables*, http://business.statistics.sweb.cz/normal01.jpg.

[10] Per saperne di più sulla terminologia legata al mondo delle scommesse vedi il sito http://www.scommessegiochivirtuali.com/come-funzionano-le-scommesse-sportive (*n.d.t.*).

[11] *Proposed Jury Instruction for reasonable Doubt*, www.state.wv.us/WVsCa/jury/crim/reasonable.htm.

[12] Uno studioso di statistica serio osserverebbe che non è questa la definizione precisa di un errore di primo tipo, ma questo non è un libro per statistici seri. se vi interessa una definizione esatta, potete trovarla in M. Triola, *Elementary Statistics*, addison-Wesley, Boston 2006, p. 398.

[13] Se vi interessa, il calcolo è $500 \times \{0,12 + 1,645\ [(0,12 \times 0,88)/500)]\}$. La formula di partenza potete trovarla in M. Triola, *op. cit.*, p. 408.

[14] Azienda leader nelle indagini di mercato (*n.d.t.*).

[15] Nel 1948 harry Truman, benché fosse dato per sconfitto, fu riconfermato alla presidenza battendo l’avversario Thomas E. Dewey. Truman si fece fotografare esibendo una copia del «Chicago Tribune» su cui appariva il fatidico titolo: *Dewey beats Truman* (*n.d.t.*).

10
In che modo la matematica può risollevare l’economia

Cos’è il *Tulip Index*? • Cosa le società di credito ipotecario non capiscono dei numeri negativi? • Cosa provocò il crac in Borsa nel 1929?

Il servizio sanitario è carente, ma la nostra incapacità di migliorarlo non ha danneggiato la salute mondiale neanche di un briciolo, se paragonata ai danni provocati dalla nostra incapacità di capire che l’economia versava in uno stato ancora più disastroso. Era già successo molte volte in passato. E ogni volta i matematici accendevano segnali d’allarme... la prima volta quattro secoli fa.

Ehi, sono solo tulipani

La prima bolla finanziaria documentata si verificò nell’inverno 1636-37, nella Repubblica delle sette Province Unite, una terra oggi nota come Paesi Bassi (l’Olanda). Nel sedicesimo secolo, i tulipani vennero importati in Olanda dall’impero ottomano e in poco tempo divennero un bene di lusso e uno status symbol. Essi fioriscono in un periodo molto breve, aprile e maggio, anche se i bulbi dai quali nascono possono essere ripiantati fino a settembre. Ciò diede origine a due mercati: il “mercato a pronti” dove si potevano acquistare i tulipani, e una variante di quello che oggi definiremmo “mercato dei *futures*”, nel quale i coltivatori sottoscrivevano dei contratti in cui s’impegnavano a consegnare i tulipani durante la stagione di crescita.

Tutto andò bene per il mercato dei tulipani finché i francesi non cominciarono a interessarsi a questi fiori, facendo così crescere la domanda. Proprio come succede oggi nei vari mercati dei *futures*, apparvero gli speculatori. I prezzi dei bulbi rari raggiunsero vette impressionati. Nel 1636, un lavoratore specializzato poteva aspettarsi di guadagnare suppergiù 150 fiorini all’anno; al tempo stesso, un unico bulbo di tulipano “Viceroy” si vendeva a 2500 fiorini.

I prezzi salgono con la rarità; non è difficile per me accettare il fatto che un’automobile d’epoca possa valere quindici volte il mio salario annuale e che da un Monet o da un’altra opera davvero unica e ambita si possa ricavare dieci volte di quanto potrei guadagnare in una vita intera. La salute finanziaria di una società non ne viene compromessa, perché semplicemente non ci sono abbastanza automobili d’epoca od opere di Monet. Se, però, ce ne sono troppe e a prezzi esorbitanti, sorgono diversi pericoli potenziali. Alcuni divennero da potenziali a reali nel febbraio del 1637, quando il mercato dei tulipani crollò.

All’epoca, il commercio dei tulipani si svolgeva presso molti mercati delle città olandesi. Charles Mackay, autore del famoso trattato del 1841, *La pazzia delle folle, ovvero le grandi illusioni collettive*, affermò che «l’intera popolazione, perfino la feccia della società, s’imbarcò nel commercio dei tulipani»[1]. Sebbene alcune idee di Mackay siano state ridimensionate dai moderni economisti, sembra chiaro che il commercio dei tulipani sia stato l'equivalente della bolla della new-economy nell'Olanda del 1637. Probabilmente, a un certo punto, la feccia della società si sarà guardata negli occhi e avrà detto: «Che stiamo facendo? Ehi, sono solo tulipani». A ogni modo, il prezzo dei tulipani crollò, e con esso le fortune di quanti ci avevano investito quando aveva raggiunto i suoi valori massimi. Alla fine, il governo dovette intervenire, garantendo che coloro che avevano acquistato ai vecchi prezzi potessero rescindere i loro contratti pagandone solo il 10%.

C'è da notare che la visione di Mackay, praticamente indiscussa per quasi 150 anni, recentemente è stata passata al vaglio degli studiosi. Secondo alcuni documenti, sembrerebbe che il commercio dei tulipani fosse essenzialmente un'attività a cui si dedicava una parte ristretta della popolazione olandese e che gli effetti del crollo del mercato di quei fiori siano stati limitati. Ciò nonostante, si *sarebbe* potuta realizzare la situazione che descrive Mackay, perché si *è* realizzata due volte negli ultimi dieci anni, con il crollo del NASDAQ[2] nel 1999 e quello che Alan Greenspan definì uno «tsunami finanziario che si verifica una volta in un secolo», che nel 2008 devastò il mercato immobiliare e le banche. Senza dubbio esistono elementi comuni a tutti e tre questi crolli del mercato, e hanno a che fare con l'aritmetica.

Il valore intrinseco

I tulipani sono senz'altro belli, ma non forniscono un riparo, non si possono indossare, né mangiare, anche se una volta un marinaio olandese ci provò, scambiando un bulbo raro per una cipolla. Il mercante di tulipani e la sua famiglia lo inseguirono accusandolo di aver mangiato una mercanzia che, barattata con il cibo, avrebbe sfamato un intero equipaggio per un anno. Il marinaio venne messo in prigione.

Il valore è un concetto elusivo. La società ha attribuito ai bulbi di tulipano e alle azioni della new-economy un valore del tutto sproporzionato rispetto al loro valore intrinseco: quello che avrebbero avuto in quasi ogni altro periodo. Come abbiamo fatto notare in precedenza, i problemi nascono non quando il prezzo di un oggetto raro aumenta sproporzionatamente rispetto al suo valore intrinseco, ma quando questo accade ai prezzi di oggetti comuni, come un bulbo di tulipano o le azioni della new-economy.

Il che ci porta al 2008.

Lo tsunami finanziario che si verifica una volta in un secolo

Si potrebbe pensare che le case non rientrino nella stessa categoria dei tulipani o delle azioni della new-economy. Gli immobili hanno un enorme valore intrinseco. Dopotutto, sia che si tratti di una bicocca o una reggia, una casa ci offre un luogo dove vivere. La causa dello tsunami era evidentemente piuttosto diversa dalle sventure che colpirono l'Olanda in conseguenza del crollo del mercato dei tulipani. C'erano però degli elementi comuni e hanno a che fare con l'aritmetica.

Non sono il primo docente ad avere notato che i miei studenti sono tutt'altro che portati per i numeri. Il bel testo di Allen Poulos, *Innumeracy* ("Analfabetismo matematico"), sarà anche stato il primo tentativo letterario di documentare degnamente questo fenomeno, ma in realtà non ha detto nulla che gli insegnanti di matematica non sapessero già da un po'[3]. La ragione può essere in parte considerata l'onnipresenza delle calcolatrici: è molto più semplice spingere dei pulsanti su una calcolatrice che capire davvero cosa rappresentino le operazioni aritmetiche. Eppure una parte dell'aritmetica – una parte antica e fondamentale – è la comprensione di ciò che i *numeri* rappresentano. Il senatore dell'Illinois Everett Dirksen richiamò l'attenzione su questo problema alcuni decenni fa quando, discutendo di questioni finanziarie riguardanti il governo degli Stati Uniti, disse: «Un miliardo di qua, un miliardo di là, e molto presto vi ritroverete a parlare di soldi *veri*»[4]. Moltiplicate quei numeri per dieci, come richiede un mezzo secolo di inflazione, ed entrerete nel mondo delle banche e delle società di credito ipotecario di oggi.

Mi sono laureato in matematica e non in economia, e lasciai un corso su questa materia dopo solo una settimana, perciò non mi considero certo in grado di analizzare i meccanismi economici alla base dello tsunami finanziario. Mi sembra, però, che in questo dramma ci fossero tre interpreti principali: chi era intenzionato a comprare una casa, le società di credito ipotecario e il governo degli Stati Uniti. Anche rischiando di commettere una grossa gaffe in teoria economica (mio padre aveva ragione: potrei pentirmi di aver abbandonato quel corso), lasciate che dia un'occhiata agli errori aritmetici e numerici commessi da tutte e tre le parti.

I futuri proprietari di casa che si ritrovarono ad affrontare il rischio di pignoramento rientravano in tre categorie. La prima – e chiaramente la meno colpevole – era quella degli individui che avevano valutato attentamente l'acquisto, convinti di poter continuare a pagare il mutuo per la sua intera durata, e si erano poi imbattuti in difficoltà impreviste. Oggigiorno, sono spesso necessari due redditi per sostenere una famiglia e, quando la situazione economica si fa difficile e uno o entrambi i titolari di uno stipendio perdono il lavoro, diventa impossibile continuare a pagare le rate del mutuo. Indubbiamente questo può succedere anche in condizioni economiche favorevoli, ma ovviamente accade con più frequenza durante periodi di recessione.

Il secondo gruppo era composto da quelli per cui l'acquisto di una casa sarebbe stato uno sforzo eccessivo. Io e mia moglie rientravamo in questa categoria. Abitiamo in un appartamento e qualche anno fa la casa dei nostri sogni si rese disponibile. Potevamo farcela a pagare le rate: siamo entrambi professori di matematica – generalmente una figura richiesta (anche se non guadagna come una rock star, purtroppo) perfino quando l'economia va male – e siamo di ruolo. Ciò nonostante, quasi non avremmo potuto permetterci un margine di errore, e se avessimo avuto gravi problemi di salute o altro, ci saremmo ritrovati nei guai. Quindi rinunciammo. Altre coppie, di fronte a circostanze identiche, senza dubbio hanno corso il rischio. Una piccola parte di loro ha avuto dei problemi e si è ritrovata con la casa pignorata.

Il terzo gruppo consisteva di individui a cui non avrebbe dovuto essere offerta l'opportunità di comprare una casa. Gran parte della colpa qui è da attribuirsi a usurai rapaci e istituzioni disattente, e di questo parleremo più tardi. Ma parte della colpa ricade sulle singole persone che sapevano di condurre uno stile di vita al di sopra delle proprie possibilità. Forse alcuni pensarono cose del tipo "o la va o la spacca". Se il valore delle case continuava a salire, sarebbero riusciti a ottenere dei prestiti grazie all'aumento di valore della proprietà; altrimenti, se non fossero riusciti a pagare le rate del mutuo, avrebbero almeno potuto nutrire per alcuni anni l'illusione del sogno americano.

Il primo gruppo fu penalizzato dalla sfortuna: non si possono prendere sempre tutte le decisioni prevedendo il peggio, specialmente se sembra lontanissimo. Le persone del secondo gruppo o non fecero bene i conti o, se li fecero, decisero di ignorarli. Prima o poi, se si vive al limite, si verificherà qualche circostanza sfortunata, e il gioco semplicemente non vale la candela. Io e mia moglie decidemmo che proprio non ce la sentivamo di correre il rischio solo per progredire un po' sulla scala sociale. Non è un calcolo semplicissimo da fare, ma credo che a molte famiglie nella nostra condizione si prospettasse essenzialmente una scelta simile. Nel nostro appartamento saremmo sopravvissuti a qualche difficoltà economica, ma non in una casa. Troppi rischi, a confronto dei vantaggi prospettati.

L'ultimo gruppo consisteva per lo più di spiriti liberi: "cicale" che credevano l'inverno non dovesse mai arrivare, o persone che avevano scorto una falla nel sistema che permetteva loro di vivere molto al di sopra delle proprie possibilità, seppure per un breve periodo. Adottare uno stile di vita che non ci si può permettere dipende o dall'incapacità di capire i numeri negativi o dall'averli capiti ma non dar loro importanza: prima o poi, arriva la resa dei conti.

Il debito e i numeri negativi

Non conosco abbastanza la storia della matematica per sapere perché vennero introdotti i numeri negativi, ma scommetto che avevano a che fare con il concetto di profitto e perdita. Quando parlo dei numeri negativi nel mio corso di matematica per gli studenti di scienze umanistiche o in quello per gli insegnanti delle scuole elementari, per spiegarli mi servo sempre dell'idea di debito. Il concetto fondamentale qui è che aggiungendo un numero negativo (–5, per esempio) a un numero positivo della stessa grandezza (5), il risultato è 0. Quindi, –5 + 5 = 0. Praticamente chiunque abbia più di otto anni capisce che, per cancellare un debito di 5 dollari, ci vogliono 5 dollari, con la conseguenza che il debitore si sarà rimesso "in pari" con il suo creditore. Praticamente chiunque, tranne il secondo gruppo di persone coinvolte nello tsunami finanziario: le società di credito ipotecario.

Sin dalla nascita dell'industria bancaria, i mutui edilizi sono stati un affare da prendere sul serio, sia per chi otteneva sia per chi concedeva il prestito. I primi dovevano versare una caparra considerevole per essere anche solo presi in considerazione. Ciò significava avere già accantonato una certa quantità di risorse finanziarie, e non solo erano presumibilmente in grado di restituire il prestito, ma era anche improbabile che fossero insolventi nei primi tempi, perché in tal caso avrebbero dovuto rinunciare alla caparra. Erano in ballo i soldi delle banche, e per molto tempo esse furono fra le istituzioni più conservatrici.

Stranamente, però, in quest'immagine si dimentica un aspetto molto importante: le banche non hanno mai abbastanza contanti disponibili per rimborsare i depositi dei loro clienti! Il denaro liquido che resta fermo in banca non porta profitti: essa si arricchisce concedendo i prestiti. Naturalmente, dev'essere prudente, assicurandosi che il prestito abbia buone probabilità di essere restituito e che l'interesse generato porti un profitto. Proprio la capacità di concedere prestiti rende le banche i motori del commercio, assicurando liquidità alle imprese, il che permette la nascita di nuovi business e l'espansione di quelli già esistenti. Finché i tempi sono favorevoli, le cose vanno bene. Ma quando i tempi sono bui e la fiducia nelle banche scompare (oppure i depositanti hanno bisogno di liquidità), sorgono i problemi e gli sportelli vengono presi d'assalto. Episodi del genere si verificarono durante la Grande Depressione, quando molte banche dovettero chiudere i battenti. La Federal Deposit Insurance Corporation, che garantisce i depositi bancari fino a un certo ammontare (in origine 100.000 dollari, adesso 250.000), si limita a trasferire la fiducia di chi deposita dalle banche al governo. Forse, poiché il governo può stampare valuta (e le banche no) la fiducia è giustificata.

Più avanti, nel corso del capitolo, esamineremo la Grande Depressione e il ruolo delle azioni comprate a credito.

Per chi li ottiene, i prestiti sono dei passivi, il sistema di contabilità bancario, però, li considera attivi, senza preoccuparsi di quanto siano garantiti. Se i prestiti non sono sicuri, però, le insolvenze diventano più probabili, con ovvie conseguenze negative per i bilanci degli istituti di credito. Si potrebbe pensare che ciò spinga le banche verso procedure di prestito più caute, e in realtà nel passato è stato così. Verso la fine degli anni Settanta, però, la situazione cominciò a cambiare.

A mettere in moto questo cambiamento fu il *Community Reinvestment Act* (CRA), che divenne legge nel 1977. Il suo fine era alleviare il degrado delle aree urbane abitate dai meno abbienti e dalle minoranze. Ciò significava che le banche dovevano destinare una parte dei loro crediti immobiliari per l'acquisto di "case a costi sostenibili", ovvero concedere un mutuo edilizio a persone che normalmente non avrebbero potuto soddisfare i requisiti sempre più severi in termini di caparre e capacità di credito. Questa strada verso la catastrofe finanziaria fu in realtà lastricata di buone intenzioni. Comprare una casa è un fattore fondamentale del sogno americano. L'intento del CRA non era soltanto di aiutare ad avere una casa di proprietà chi altrimenti non avrebbe potuto permettersela, ma promuovere un senso di orgogliosa appartenenza alla comunità, tanto più naturale per chi vi possiede degli interessi.

Un altro importante pezzo del puzzle andò a posto all'inizio degli anni Novanta, quando Fannie Mae e Freddie Mac[5], agenzie governative che compravano e cartolarizzavano i mutui, dovettero destinare una parte dei loro prestiti agli alloggi a costi sostenibili. Ciò permise alle banche di scaricare il rischio di questa tipologia di mutui e si dimostrò un fattore che rese possibile la concessione di un numero sempre maggiore di mutui a condizioni sempre più rischiose. Ormai le banche erano simili ad agenzie d'intermediazione, che facevano soldi sulla quantità, mentre gli standard dei mutui peggioravano. Vennero creati dei titoli garantiti da un insieme di prestiti ipotecari in cui i mutui venivano impacchettati – alcuni buoni (dal punto di vista della capacità del creditore di ipoteca di restituire il prestito) e alcuni cattivi – e liberamente rivenduti. L'industria edilizia, che era stata costruita su accordi ben studiati fra banche e proprietari, era diventata un mercato nel quale i mutui impacchettati spesso di dubbia qualità venivano commerciati fra società e singoli investitori.

Come si dice nell'ambiente, quando la polizia fa una retata in una casa di tolleranza, la tenutaria finisce dentro insieme alle ragazze. Lo tsunami finanziario spazzò via i singoli proprietari di case, le banche che avevano concesso mutui rischiosi e le agenzie federali che li avevano assicurati. E così tutto ci riporta all'aritmetica.

Le frazioni fluttuanti

Le frazioni rivestono un ruolo essenziale nella *due diligence*[6]. La frazione fondamentale qui è una quantità chiamata LTV, *loan to value ratio*, ovverosia il rapporto tra l'ammontare del mutuo e il valore stimato dell'immobile, espresso come percentuale. Se una casa vale 400.000 dollari (valore determinato da un esperto o sulla base di una transazione simile recente fra un compratore e un venditore) e il beneficiario del prestito desidera chiederne 360.000, l'LTV è del 90%. Ovviamente più alto sarà questo valore, più rischioso sarà il mutuo dal punto di vista di chi presta. C'è sempre il pericolo che chi ha ottenuto il prestito sia insolvente e che il valore della casa possa diminuire. Ciò potrebbe far sì che chi concede il prestito si ritrovi con un mutuo equivalente a una somma maggiore del valore della proprietà per cui esso era stato concesso.

Ai bei vecchi tempi, quando la *due diligence* era in voga, i mutui non potevano essere quasi mai stipulati con un rapporto di LTV maggiore dell'80%, perché sarebbe stata richiesta una caparra del 20% sulla casa. Non solo ciò contribuiva ad assicurare la capacità di credito di un cliente, ma serviva da garanzia contro un mutuo non pagato, perché il valore dell'immobile poteva diminuire di una percentuale considerevole senza danneggiare il prestatore.

Nell'ottobre del 2002, il presidente George W. Bush tenne un discorso che, esaminato retrospettivamente, fu fondamentale per quanto riguardava le possibilità delle minoranze di comprare una casa[7]. Elencò quattro problemi che impedivano a queste persone di ottenerne una: impossibilità di versare una caparra, assenza di immobili a prezzi popolari, difficoltà a comprendere procedimenti e moduli, e a trovare finanziamenti. In linea con la sua filosofia del "conservatorismo compassionevole", vennero avviati dei programmi governativi o accelerati quelli già esistenti per il pagamento delle caparre, la costruzione di case a prezzi convenienti e la concessione di finanziamenti. Col senno di poi, questi programmi erano troppo indulgenti e troppo poco conservatori. La capacità di credito non veniva più considerata, perché le banche ricevevano un abbondante supporto dal governo federale. Il rischio di concedere un mutuo era stato, in buona parte, trasferito sul governo federale, e più una banca concedeva mutui, più faceva soldi. Tutto andò a rotoli tra fine estate e inizio autunno del 2008, quando si capì che Freddie Mac e Fannie Mae, le agenzie che garantivano i mutui, erano insolventi e le società che avevano pesantemente investito in titoli garantiti da prestiti ipotecari si ritrovarono con dei "titoli tossici", mutui che non potevano essere rimborsati perché garantiti da proprietà il cui valore era crollato al di sotto del mutuo concesso. Ci vorranno anni, se non decenni, per farne piazza pulita.

Un'orribile, ma in qualche modo affascinante, coincidenza si verificò alla fine del 2008, quando il disastro del mercato immobiliare si affiancò alla scoperta della truffa multimiliardaria messa in atto da Bernard Madoff sul modello dello schema di Ponzi[8]. Quello di Madoff era brillante nella sua semplicità: pagava ai primi investitori percentuali di guadagno più alte e più sicure di quelle ottenibili sul mercato, ma non così ingenti da destare sospetti. Prima o poi, ogni schema di Ponzi soccombe davanti alla necessità di trovare sempre nuovi investitori: alla fine i suoi agenti si trovarono a setacciare la Cina alla ricerca di altro capitale. Allo stesso modo, il mercato immobiliare continuò a crescere, dato che sempre più persone decidevano di comprare una casa, ma quando i buoni clienti terminarono, bisognò concedere mutui *subprime* a quelli a rischio. Quando la qualità e la quantità di potenziali proprietari di case diminuirono e i mutui non vennero pagati, il castello di carte crollò.

La lezione di matematica

Non si tratta di una lezione particolarmente complessa. Ho scritto da qualche altra parte che i numeri e le informazioni numeriche hanno senso per una parte della popolazione solo come etichette: uno porta scarpe numero 40 o abita al numero 123 di Elm Street. Ma il significato dei numeri negativi come debiti e delle frazioni come rapporti LTV avrebbe certamente dovuto essere noto alle società di credito ipotecario, alle banche e al governo, ma così non è stato. Non aver tenuto conto dei numeri negativi e delle frazioni ha portato al tracollo finanziario del 2008.

Il crac del 1929

Gli storici generalmente sono d'accordo nell'affermare che il grande crac della Borsa del 1929 fu dovuto a svariate cause, ma che uno dei fattori esacerbanti fu la possibilità di comprare azioni a credito con un piccolissimo anticipo ("acquisto con margine" è il nome tecnico di questo tipo di investimento). Oggigiorno la maggior parte degli investitori acquista fondi aperti per i propri piani di risparmio pensionistici, e comprare a credito non rientra nel quadro. Nel 1929, però, gli investitori non acquistavano fondi aperti, ma titoli, e li compravano versando una caparra. Per comprare un titolo con un anticipo del 10%, bisognava soltanto avere a disposizione il 10% del prezzo di quel titolo. Se un titolo costava 50 dollari per azione, lo si poteva acquistare con un investimento di 5 dollari, ma si assumeva tutto il rischio delle sue variazioni di prezzo. Se saliva a 55 dollari (e lo si rivendeva), ci si guadagnavano 5 dollari: un profitto del 100%. Se scendeva a 45 dollari, però, l'intero investimento veniva spazzato via, e se scendeva ancora al di sotto, ci si ritrovava in debito per un valore che superava quello dell'investimento. L'acquisto con margine era un'operazione molto rischiosa, e quando il mercato cominciò a scendere, portò via con sé i risparmi di molti piccoli investitori.

C'è uno strano parallelismo fra il crac del 1929 e lo tsunami del 2008, che probabilmente dei lettori attenti avranno già notato. Nel 1929 gli investitori finanziarono i loro investimenti speculativi prendendo in prestito dei soldi per comprare azioni e offrirle come garanzia collaterale. Ciò ricorda quanto è accaduto nel 2008, quando chi desiderava comprare casa ha preso in prestito il denaro offrendo poi lo stesso immobile come garanzia collaterale. Nel 1929, finché il prezzo delle azioni salì, andò tutto bene, proprio come tutto andò bene nel 2008 finché i prezzi delle case continuarono a crescere.

Ma nel 1929, quando le azioni crollarono, chi aveva preso prestiti non poté più soddisfare la richiesta di capitale aggiuntivo (il temuto *margin call*[9]) e dovette cedere le azioni a chi gli aveva concesso il prestito necessario all'acquisto. E, naturalmente, nel 2008, quando i proprietari delle case, che avevano fatto affidamento sull'aumento dei prezzi degli immobili per ottenere un rifinanziamento, non riuscirono a ottenerlo, non furono più in grado di riscattare l'ipoteca. Nel 1929, gli istituti che avevano prestato soldi agli speculatori si ritrovarono con delle garanzie collaterali il cui valore era inferiore all'ammontare del prestito: esattamente quello che accadde nel 2008, quando le banche si ritrovarono in possesso di case il cui valore stimato era inferiore all'ammontare del mutuo. Nulla di nuovo sotto il sole.

L'aritmetica e il debito

I numeri negativi e le frazioni sono di poco interesse per la maggior parte delle persone, che quando erano a scuola si sono ritrovate in classe a cercare di trattare con queste entità. Troppe volte, tale interazione non si accompagna a ciò che davvero è importante: associare a quelle entità astratte oggetti presi dalla vita reale. Se generando un debito si ottengono delle provvigioni, esso continuerà a essere generato praticamente all'infinito. Quando un numero negativo viene inserito su un libro mastro, accadrà una di queste due cose: o verrà annullato da numeri positivi (quando le merci aumentano di valore) o dovrà venire assorbito da qualcuno.

Il debito è un'arma a doppio taglio. Se affrontato con *due diligence*, permette all'economia reale di espandersi creando nuovi beni, lavoro e servizi. Se affrontato troppo liberamente, gli strumenti finanziari che ne risultano non riusciranno a riflettere il valore dei beni sottostanti dell'economia reale, perché la società non è in grado di produrre i beni necessari a rimborsarlo, con risultati potenzialmente catastrofici. I rapporti LTV sono le frazioni che "fanno la guardia" perché questo non accada; come si è visto varie volte, li ignoriamo a nostro rischio e pericolo.

Il *Tulip Index*

I matematici sono in grado di fornirci segnali d'allarme che indichino l'avvicinarsi di un tracollo? Una possibilità è quella di immaginare di ritrovarci dove questo capitolo ha avuto inizio, nell'Olanda del diciassettesimo secolo. Quando il prezzo di un bulbo raro di tulipano superò di sedici volte il salario annuo di un lavoratore specializzato, qualche campanello d'allarme sarebbe dovuto suonare. Quando il *Tulip Index* (il rapporto fra il prezzo di un bulbo raro di tulipano e il salario annuo di un lavoratore specializzato) crebbe in modo anomalo, fu il segnale che c'era un problema. Se il prezzo di un Monet supera i 100 milioni di dollari non è una minaccia per la salute finanziaria di una società, perché ne esistono pochissimi esemplari. Ma quando il prezzo di un bene con un basso valore intrinseco, che riveste un interesse finanziario per un gran numero di persone, sale alle stelle, è segno che i guai sono in arrivo.

Per creare un moderno *Tulip Index*, ho cercato su Google un paio di database e ho creato la tabella che segue. L'anno 1975 costituisce la linea di partenza, non perché sia un anno con un particolare significato, ma perché per uno dei database non esistevano informazioni precedenti a quella data. Il valore 1 è stato da me arbitrariamente assegnato al reddito familiare annuo medio e alla chiusura annuale dell'indice S&P 500[10] per il 1975; le cifre corrispondenti per gli altri anni sono espresse come multipli delle cifre per il 1975.

Il *Tulip Index* è dato dal rapporto fra la chiusura annuale dello S&P e il reddito annuo, corretto in modo che il valore sia 1 per il 1975. Le azioni sono i tulipani di questa nostra epoca; il loro valore si basa in gran parte su quanto viene attribuito a esse dalle persone e il loro valore intrinseco è ben poca cosa. Le azioni un tempo venivano emesse per fornire il capitale iniziale per un'impresa e la gente le acquistava per il reddito da dividendi, ma sebbene questi aspetti esistano ancora oggi, la maggior parte del denaro "investito" in Borsa è essenzialmente un azzardo, come i tulipani.

ANNO	REDDITO ANNUO*	S&P	TULIP INDEX	ANNO	REDDITO ANNUO	S&P	TULIP INDEX
1975	1.00	1.00	1.00	1992	1.16	4.83	4.14
1976	1.02	1.19	1.16	1993	1.21	5.17	4.26
1977	1.04	1.05	1.01	1994	1.24	5.09	4.12
1978	1.07	1.07	0.99	1995	1.26	6.83	5.43
1979	1.08	1.20	1.11	1996	1.28	8.21	6.39
1980	1.05	1.51	1.44	1997	1.33	10.76	8.11
1981	1.03	1.36	1.31	1998	1.36	13.63	9.98
1982	1.04	1.56	1.50	1999	1.41	16.29	11.54
1983	1.04	1.83	1.75	2000	1.42	14.64	10.26
1984	1.08	1.85	1.71	2001	1.41	12.73	9.01
1985	1.11	2.34	2.12	2002	1.38	9.76	7.06
1986	1.15	2.69	2.33	2003	1.38	12.33	8.93
1987	1.17	2.74	2.33	2004	1.37	13.44	9.76
1988	1.19	3.08	2.59	2005	1.39	13.84	9.92
1989	1.22	3.92	3.21	2006	1.42	15.73	11.08
1990	1.19	3.66	3.07	2007	1.40	16.03	11.44
1991	1.17	4.62	3.96				

* Dati tratti dal U.S. Census Bureau, *Historical Income Tables – Households* (Ufficio del censimento degli Stati Uniti, *Tabelle storiche del reddito – Famiglie*), www.census.gov/hhes/www/income/histinct/h06AR.html

Il Tulip index *dello S&P, 1975-2007.*

Nel 1996, per esempio, il reddito familiare medio era del 28% più alto rispetto a quello del 1975, e il prezzo di chiusura dello S&P alla fine del 1996 era più di otto volte quello alla fine del 1975. Quell'anno, il *Tulip Index* stava a 6,39; il che vuol dire che lo S&P era aumentato dal 1975 con una rapidità sei volte maggiore del reddito annuo.

C'è da notare che sia nel 1999 che nel 2007 il *Tulip Index* era poco più alto di 11. È una curiosa coincidenza, e in entrambi i casi in seguito è crollato, sebbene per motivi diversi: nel 1999 per la bolla della new-economy, e nel 2008 per il crac finanziario. Uno scettico potrebbe obiettare che si tratta di un risultato artefatto, che scaturisce dall'aver scelto il 1975 come anno di partenza. Io e il mio editor abbiamo pensato lo stesso, perciò sono ritornato ai miei documenti alla ricerca di dati precedenti, scoprendo a questo punto una cosa davvero interessante. La documentazione del *Dow-Jones Industrial Average*[11] mostrava che tra il 1929 e il 1975 l'indice era aumentato di un fattore pari a circa 3,5. Lo S&P era andato un po' meglio: tra il 1950 e il 1975 l'incremento era stato di un fattore pari a circa 4,5. Solo dopo il 1975 le medie di mercato, in particolare l'indice generale S&P, aumentarono vertiginosamente. Cosa aveva innescato questo fenomeno? Ciò segna, con una certa approssimazione, l'inizio dell'era dei fondi aperti e, cosa altrettanto importante, l'avvento di società di brokeraggio che applicano sconti sulle commissioni. La richiesta di commissioni inferiori rese possibili le contrattazioni giornaliere. Quando erano alte, la strategia di *default* era quella di comprare e tenere[12]. Il *trading on-line* ha esacerbato la situazione. I titoli non divennero tulipani finché non si verificò questa combinazione di eventi.

Il *Tulip Index* dei prezzi delle case in rapporto al reddito annuo è ugualmente rivelatore. Sebbene non sia altrettanto clamoroso di quello per lo S&P, anche questa tabella serve da monito. Il prezzo delle case è salito più rapidamente del reddito familiare annuo, proprio nel momento in cui sempre più persone – di solito quelle che vivevano in zone dal reddito medio inferiore – compravano casa. Sebbene gli immobili possiedano un valore intrinseco molto maggiore rispetto a quello dei titoli o dei tulipani, qualcosa doveva succedere... e come sappiamo, è successo.

ANNO	REDDITO ANNUO	PREZZO DEGLI IMMOBILI*	TULIP INDEX	ANNO	REDDITO ANNUO	PREZZO DEGLI IMMOBILI	TULIP INDEX
1975	1.00	1.00	1.00	1992	1.16	3.38	2.90
1976	1.02	1.13	1.10	1993	1.21	3.47	2.86
1977	1.04	1.27	1.22	1994	1.24	3.63	2.93
1978	1.07	1.47	1.37	1995	1.26	3.73	2.96
1979	1.08	1.69	1.56	1996	1.28	3.91	3.04
1980	1.05	1.79	1.72	1997	1.33	4.14	3.12
1981	1.03	1.95	1.89	1998	1.36	4.27	3.13
1982	1.04	1.97	1.90	1999	1.41	4.59	3.25
1983	1.04	2.11	2.03	2000	1.42	4.86	3.41
1984	1.08	2.29	2.12	2001	1.41	5.00	3.54
1985	1.11	2.37	2.14	2002	1.38	5.37	3.89
1986	1.15	2.63	2.28	2003	1.38	5.78	4.19
1987	1.17	2.99	2.55	2004	1.37	6.44	4.69
1988	1.19	3.25	2.74	2005	1.39	6.97	5.00
1989	1.22	3.49	2.86	2006	1.42	7.18	5.06
1990	1.19	3.52	2.95	2007	1.40	7.36	5.26
1991	1.17	3.46	2.96				

* Dati tratti dal U.S. Census Bureau, *Median and Average Sales Prices of New Homes Sold in United States* (Ufficio del censimento degli Stati Uniti, *Prezzi medi e mediani dei nuovi immobili venduti negli Stati Uniti*), www.census.gov/const/uspriceann.pdf

Il Tulip index *del prezzo medio degli immobili, 1975-2007.*

Nel mondo i grandi capitali devono essere investiti da qualche parte, ed è difficile pensare a un luogo diverso dal mercato azionario. Ciò nonostante, la storia tende a ripetersi, e la prossima volta che il *Tulip Index* dello S&P mi sembrerà alto (potete essere quasi certi che succederà), investirò i miei soldi in fondi monetari. Potrebbe sfuggirmi la prossima bolla del mercato azionario (a questa strategia sarebbe sfuggita quella della new-economy della fine degli anni Novanta), ma le cifre parlano chiaro. Quando il *Tulip Index* è basso, però, acquisterò delle azioni. La storia (non solo i dati della mia tabella) dimostra che generalmente le azioni sono aumentate più dell'inflazione, specie nel periodo successivo alla seconda guerra mondiale. Credo che un'accorta strategia di *buy-and-hold* (e oggi non c'è bisogno di scegliere le azioni giuste, si può acquistare un fondo indicizzato), insieme a un abbandono del mercato nei periodi in cui si ha un alto *Tulip Index*, a lungo andare risulterà vincente. Nel marzo 2009, il *Tulip Index* era sceso più o meno a 5, e quello sarebbe stato un momento ottimo per acquistare azioni incluse nello S&P, che immediatamente aumentarono di quasi il 40% in sei settimane. A chi fa previsioni di Borsa lascerò il compito di calcolare i valori fondamentali del *Tulip Index*: quando comprare, quando lasciar perdere. Non è questo il mio compito. Col senno di poi, però, ci sono alcune cose nella mia vita che avrei potuto fare e vorrei avere fatto, e una di queste sarebbe stata mettere da parte un po' di soldi ogni mese da investire in un fondo indicizzato, per poi vendere quando il *Tulip Index* si fosse alzato. Se avessi fatto così, ora non dovrei preoccuparmi se lo Stato della California sarà in grado di pagarmi la pensione quando lascerò il lavoro.

[1] C. Mackay, *Extraordinary Popular Delusions and the Madness of Crowds*, L.C. Page, new York 1932, p. 64 (trad. it. *La pazzia delle folle, ovvero le grandi illusioni collettive*, il sole 24 ore Pirola, Milano 2000).

[2] Acronimo di *National Association of Securities Dealers Automated Quotation* ovvero “Quotazione automatizzata dell’associazione nazionale degli operatori in titoli” (*n.d.t.*).

[3] J. A. Poulos, *Innumeracy*, hill and Wang, new York 1988.

[4] *1964–Present, September 7, 1969, Senator Everett McKinley Dirksen Dies*, www.senate.gov/artandhistory/history/minute/senator_Everett_Mckinley_Dirksen_Dies.htm.

[5] Rispettivamente *Federal National Mortgage Association* e *Federal Home Loan Mortgage Corporation* (*n.d.t.*).

[6] Letteralmente “accuratezza dovuta”. È il termine anglosassone ormai abitualmente usato anche in italiano per indicare un’indagine approfondita su un’azienda per accertarne lo stato finanziario, fiscale, patrimoniale, debitorio e creditorio, gestionale, di fatturato e così via. L’occasione per una *due diligence* su una società è data da una possibile e imminente acquisizione o fusione, con l’obiettivo di evitare sorprese dopo la firma (*n.d.t.*).

[7] Vedi 2002: *Bush’s speech to the White House Conference on Increasing Minority Homeownership*, http://isteve.blogspot.com/2008/09/2002-bushs-speech-to-white-house.html?showComment=1222342140000.

[8] Lo schema di Ponzi è un modello economico di vendita truffaldino che promette forti guadagni alle vittime a patto che queste reclutino nuovi “investitori”, a loro volta vittime della truffa. La tecnica prende il nome da Charles Ponzi, un immigrato italiano negli Stati Uniti che divenne famigerato per avere applicato una simile truffa su larga scala nei confronti della comunità di immigrati prima e poi in tutta la nazione. Ponzi non fu il primo a usare questa tecnica, ma ebbe tanto successo da legarvi il suo nome. Con tale meto do coinvolse infatti quarantamila persone e, partendo dalla modica cifra di due dollari, arrivò a raccoglierne oltre 15 milioni (*n.d.t.*).

[9] Si chiama *margin call* (o “richiesta di integrazione”) l’ordine perentorio di ricostituzione del valore originale del deposito di acconto dato in garanzia nel mercato dei *futures*, in caso di perdita di valore del titolo. La mancata integrazione comporta la risoluzione del contratto, ossia la perdita del titolo (*n.d.t.*).

[10] L’indice s&P 500 è stato realizzato da standard & Poor’s nel 1957 e segue l’andamento di un paniere azionario formato dalle 500 aziende statunitensi a maggiore capitalizzazione (*n.d.t.*).

[11] Il più noto indice della Borsa di new York, creato negli stati Uniti per valutare i ritmi di crescita dell’economia americana (*n.d.t.*).

[12] È una strategia di investimento a lungo termine (di solito indicata anche come *buyand-hold*) consistente nell’acquistare azioni ritenute solide e tenerle per un tempo ragionevolmente lungo (*n.d.t.*).

11
L’aritmetica per la prossima generazione

Come far interessare i vostri figli alla matematica? • Qual è lo scopo dell’aritmetica? • I soldi del Monopoli posso aiutarci a imparare le divisioni?

Ho trascorso la vita intera a studiare o insegnare matematica e ho assistito all’avvicendarsi di tutte le “nuove tendenze”. Ecco il mio compendio preferito di cosa è successo nel corso degli anni. L’ho scoperto per la prima volta negli anni Ottanta e da allora ogni dieci anni o giù di lì c’è stato un aggiornamento:

L’insegnamento della matematica nel 1950 (matematica tradizionale). Un taglialegna vende un carico di legname a 100 dollari. I suoi costi di produzione ammontano ai 4/5 del prezzo di vendita. Quanto guadagna?

L’insegnamento della matematica nel 1960 (il declino della matematica tradizionale). Un taglialegna vende un carico di legname a 100 dollari. Il costo della produzione equivale ai 4/5 del prezzo di vendita, ovverosia a $80. Quanto guadagna?

L’insegnamento della matematica nel 1970 (la nuova matematica). Un taglialegna scambia un insieme “L” di legname con un insieme “D” di denaro. La cardinalità dell’insieme “D” è uguale a 100. Ogni elemento vale un dollaro. Prendete 100 puntini a rappresentazione dell’insieme “D”. L’insieme “C”, il costo di produzione, contiene venti puntini in meno dell’insieme “D”. Rappresentate l’insieme “C” come sottoinsieme di “D” e rispondete alla domanda che segue: qual è la cardinalità del sottoinsieme “G” dei guadagni?

L’insegnamento della matematica nel 1980 (incoraggiare l’autostima). Un taglialegna vende un carico di legname per 100 dollari. I suoi costi di produzione ammontano a $80 e il guadagno che ne ricava è di $20. Il vostro compito: sottolineare il numero 20.

L’insegnamento della matematica nel 1990 (la outcome-based education*: ciò che conta è il risultato).* Dall’abbattimento di una foresta bellissima, un taglialegna guadagna 20 dollari. Che ne pensate del suo modo di procurarsi da vivere? Argomento da sviluppare in classe dopo che avrete risposto alla seguente domanda: come si sono sentiti gli uccelli e gli scoiattoli quando il taglialegna ha abbattuto i loro alberi? Non esistono risposte sbagliate.

L’insegnamento della matematica nel 1996 (insegnare matematica nel mercato al rialzo). Licenziando il 40% dei taglialegna, un’azienda alza le proprie quotazioni da 80 a 100 dollari. A quanto ammonterà il reddito da capitale per azione dell’amministratore delegato se questi eserciterà la propria opzione di acquisto sulle azioni a $80? Supponiamo che i redditi da capitale non vengano più tassati per incoraggiare gli investimenti.

L’insegnamento della matematica nel 2000 (insegnare matematica creativa). Un taglialegna vende un carico di legname a 100 dollari. I suoi costi di produzione ammontano a $120. Come fa la Arthur Andersen[1] a determinare che il suo margine di profitto ammontasse a $60?

Questi esempi naturalmente non vanno presi troppo alla lettera, ma nelle mie classi posso riscontrare gli effetti di quelli descritti per il 1980 e il 1990 (come ho già detto parlando della ragazza che aveva avuto bisogno di una calcolatrice per sottrarre a un certo numero il suo 10%), e vorrei fare qualcosa per diminuire le probabilità che un evento simile si verifichi di nuovo.

Questo capitolo è stato scritto per i vostri figli, o per i bambini con cui potreste avere a che fare. Gli studenti che incontro nelle mie classi sono essenzialmente una generazione perduta per quel che riguarda la matematica, ma per il futuro c’è ancora speranza.

Perché preoccuparsi?

È questo il ragionamento che fanno molti studenti – e sfortunatamente anche molti insegnanti – al giorno d'oggi. Perché affannarsi a far di conto quando le calcolatrici lo fanno meglio e più rapidamente? Ho accennato a questo argomento nella prefazione, quando ho parlato del racconto di Asimov *Nove volte sette*, ma lasciate che ve lo spieghi meglio, così non ci sarà rischio di fraintendimenti. Più una persona avrà confidenza con l'aritmetica – con i calcoli, le equivalenze, le addizioni, le sottrazioni, le moltiplicazioni e le divisioni – maggiori saranno le sue possibilità di successo nei corsi di matematica più avanzati. E, cosa forse ancor più importante, maggiore la sua capacità di districarsi con la matematica necessaria nella vita quotidiana.

Oggi si parla tanto dell'importanza dell'algebra. È sicuramente vero che, se avete problemi con l'algebra, potrete probabilmente dire addio a un lavoro nell'ingegneria o nella fisica, e diminuiranno anche le vostre probabilità di successo nella vita o negli studi sociologici. Se avete *seri* problemi con l'algebra, in numerosi Stati americani non riuscirete a diplomarvi, perché una delle condizioni indispensabili per farlo è riuscire a passare un esame finale di matematica che verte in gran parte sul corso di Algebra I. Eppure, non ho *mai* sentito uno studente dire: «In aritmetica ero bravissimo, ma l'algebra non la capisco proprio». È semplicemente impossibile. L'algebra prevede un livello di astrazione e manipolazione simbolica che di solito non sono contemplati in un normale corso di aritmetica, ma la familiarità con i numeri e la capacità di relazionarcisi costituiscono le basi su cui essa si fonda. Datemi uno studente a suo agio con l'aritmetica e vi mostrerò uno studente che supererà senza problemi la parte algebrica dell'esame di licenza superiore, a meno che non sia condizionato da fattori del tutto estranei all'ambiente scolastico.

Fateli cominciare prima possibile

Non so se è ancora così, ma ricordo che negli anni Ottanta e Novanta, quando tenevo corsi di matematica agli insegnanti delle elementari, un sondaggio fra i bambini di prima e seconda rivelò che la loro materia preferita era la matematica. Ma arrivati in prima e seconda media, era scesa all'ultimo posto.

Ecco la mia spiegazione al riguardo: nell'aritmetica c'è una sistematicità e una razionalità che i bambini sanno apprezzare. Riescono a risolvere i problemi e sanno di avere ragione anche prima che glielo dica l'insegnante. Gli psicologi affermano che i bambini vogliono la sicurezza di avere limiti ragionevoli al loro comportamento e l'aritmetica fornisce dei confini intellettuali che ben si adattano ai loro bisogni e desideri.

Una volta cresciuti, in prima o seconda media, però, cominciano a sentire il bisogno di ribellarsi. Se l'aritmetica non viene inserita in qualche sorta di contesto utile, diventa una serie noiosa di operazioni da imparare a memoria. Chi ne ha bisogno? È a questo punto che i ragazzi si domandano: «Che senso ha imparare a fare una divisione difficile se una calcolatrice ci riesce meglio e più rapidamente?».

Perciò dobbiamo innanzitutto capire che, prima aiutiamo un bambino con l'aritmetica, meglio è.

La prima cosa da sapere sull'aritmetica

È una competenza, e come in ogni altra competenza – dal saper scrivere al saper fare sci d'acqua – la vostra bravura aumenta con la pratica. Per migliorare nello sci d'acqua, però, avrete bisogno di moltissima acqua, di un motoscafo e degli sci. Per migliorare nell'aritmetica non servirà altro che volontà e qualche numero. Fortunatamente, siamo circondati dai numeri, perché l'aritmetica è il linguaggio delle relazioni quantitative.

E c'è un altro posto in particolare dove se ne possono trovare molti.

La seconda cosa da sapere sull'aritmetica

Quando abbiamo a che fare con i soldi, ci serviamo sempre dell'aritmetica. Notizia flash: i bambini sono affascinati dal denaro. È indispensabile per comprare cose, e ai piccoli piace avere cose nuove.

Tornando al Kansas del diciannovesimo secolo, le persone sapevano che uno dei modi più importanti di preparare i loro figli alla vita era farli familiarizzare con la matematica utile nel commercio. Ritorniamo all'introduzione e diamo un altro sguardo a quell'esame del 1895: è tutta aritmetica relativa al commercio. Da *La casa nella prateria* a oggi molte cose sono cambiate, ma non questa. Un'altra cosa che non è cambiata è che le transazioni commerciali in cui ci imbattiamo ogni giorno forniscono un'eccellente opportunità di migliorare le nostre competenze aritmetiche. In realtà, oggi questo è anche più vero per numerose ragioni. In un giorno-tipo avvengono molte più transazioni commerciali di quante ne avvenissero nel diciannovesimo secolo, sono più complicate e utilizzano numeri più grandi. Quando ero alle superiori lessi *Walden*[2], e ancora oggi ricordo che le spese affrontate da Thoreau nel corso di un anno erano dell'ordine dei 28 dollari. Oggi un pieno di benzina costa di più. Lo svantaggio aritmetico dell'inflazione è che diventa più difficile trovare dei problemi che abbiano a che fare con il denaro adatti a bambini piccoli, ma diventa molto più semplice trovarli – e ce n'è una grande varietà – per quelli dalla terza elementare in su.

Naturalmente, quello che ci si può aspettare da un ragazzino in termini di conoscenza della matematica cambia molto, a seconda della bravura del singolo e da dove studia, dato che i singoli Stati americani hanno il controllo dell'istruzione. Verso la fine degli anni Novanta, la California adottò delle linee guida per l'insegnamento della matematica[3]. Il mio ruolo nel corso di questo processo fu molto limitato, e credo che gli standard stabiliti allora fossero un po' come il Patto di Parigi per il raggiungimento della pace nel mondo: straordinari sul piano teorico, ma non così semplici da seguire nella pratica. Eppure sono una buona tattica educativa, da approfondire per vedere come se la cava vostro figlio e qual è la classe giusta per affrontare un determinato argomento. Ricordate, la matematica è un'abilità, e la si sviluppa affrontando delle prove impegnative che richiedano l'uso al massimo delle proprie capacità, ma viene scoraggiata se esse sono troppo impegnative. Non si comincia a studiare il pianoforte dalla *Sonata al chiaro di luna* di Beethoven.

Per aiutare vostro figlio a capire la matematica, potete fare moltissimo; per chi ama i vecchi metodi, esistono intere biblioteche dedicate all'argomento, e per i genitori e i bambini che preferiscono i nuovi, spuntano a centinaia i siti web. Una mia ex-studentessa, Karena Davis, ha dato vita da sola ad una vera attività in questo campo. Ha scritto cinque libri e ideato il sito CoolMath.com che – come mi ha comunicato con motivato orgoglio – è il trecentesimo più cliccato su Internet (probabilmente inferiore per popolarità solo ai siti porno e a YouTube). Riceve più di

400.000 visitatori al giorno! La mia studentessa ha creato CoolMath.com poco dopo aver frequentato la California State University di Long Beach (dove insegno io). Karen è un raro incrocio tra un'artista e una *nerd* (non credo che avrebbe da ridire su questa mia definizione). Sono anche orgoglioso di dire che, appeso nel mio ufficio, ho un Karen Davis originale: è la rappresentazione grafica di una vecchia calcolatrice (del 1997 circa), ma al posto del quadrante dove dovrebbero apparire i calcoli c'è la fotografia di un astronauta sulla luna. A ogni modo, su CoolMath.com ci sono un sacco di materiali per studenti, genitori e insegnanti. Mettetelo fra i preferiti. Ancora meglio, visitatelo con i vostri figli.

Ora però state leggendo questo libro, quindi lasciate almeno che vi fornisca i primi rudimenti su come aiutare i vostri figli a sviluppare le loro capacità aritmetiche. Poi andate a guardare CoolMath.com.

Completamente a mente

È così che calcoliamo una somma da pagare. Alla fine della prima elementare, i bambini dovrebbero conoscere quella che è nota come "tabella dell'addizione" e saper sommare fino a venti, il che vuol dire che dovrebbero saper sommare due numeri a una cifra senza dover contare sulle dita. Capita tante volte di dover comprare due cose, per esempio un hamburger e una bibita al fast-food vicino casa, e se volete aggiungerci anche le patatine fritte, be', le linee guida della California prevedono che un bambino di quell'età sappia sommare tre numeri a una cifra. Se il prezzo di uno di quegli elementi è più alto di un numero a una cifra (quando è stato arrotondato), o vivete in un quartiere molto diverso dal mio o è subentrata un'inflazione galoppante come negli anni Settanta.

Naturalmente, non vedrete mai in un fast-food qualcosa che costi \$2, sarà sempre \$1,95, o \$2,49, o giù di lì. Alla fine della seconda elementare, ci si aspetta che i bambini conoscano e sappiano usare le quantità decimali di denaro per risolvere semplici problemi di addizione e sottrazione. Secondo me, non è mai troppo presto per introdurre il concetto di arrotondare come "si avvicina a"; per esempio, quando chiediamo a un bambino di fare una stima del costo complessivo di un hamburger e una bibita, possiamo dirgli: «\$1,95 si avvicina a \$2, perciò consideriamo \$2 per fare il conto del totale. Non ci sbaglieremo di molto». Questo concetto di fare una stima approssimativa del risultato, piuttosto che indicare la cifra esatta, è importantissimo, perché il più delle volte vogliamo solo avere un'idea di quale sia il totale. Quando il bambino cresce e impara a fare calcoli più complessi – in quarta elementare dovrebbe essere ormai in grado di stimare il costo della spesa al supermercato – potremmo introdurre l'idea di compensare arrotondando. Se per diversi prodotti ho arrotondato per eccesso, potremmo, per compensare, arrotondare per difetto i successivi.

Se non fate i conti a mente per controllare le vostre spese, ci sono buone probabilità che abbiate perso solo per questo una bella sommetta nel corso dell'anno. Spesso gli scontrini sono sbagliati, non perché i registri di cassa siano difettosi, ma perché molte volte il prezzo sugli scaffali non è lo stesso che viene conteggiato dal computer. Spesso i negozi fanno delle offerte e, anche se per far acquisire il prezzo del prodotto al computer che controlla il registro di cassa si può utilizzare uno scanner, ciò non sempre viene fatto. Ecco un fatto che non vi sorprenderà: nove volte su dieci gli errori commessi sono ai danni del consumatore e a vantaggio del negozio. Una volta ho tenuto il conto nel corso di un anno di tutto quello che avevo risparmiato grazie agli errori evitati nel calcolo mentale dello scontrino. Si trattava di molte centinaia di dollari, agli inizi degli anni Settanta.

Ok, ammetto che esiste in me una spiccata componente di “secchioneria”: mi piace fare i calcoli a mente. Mi piace addizionare i voti ottenuti dai miei studenti sui singoli problemi di un esame per ottenerne il totale. Ma quello che mi piace di più è quando ho calcolato a mente quanto dovrei spendere e c’è una vistosa discrepanza fra quello che secondo me dovrei pagare e il conto che mi viene presentato. Sì, qualche volta mi sbaglio, ma nel corso degli anni ho risparmiato parecchi soldi grazie alle volte in cui avevo ragione. Se insegnate ai vostri figli a fare una stima e tenere il conto delle spese in questo modo, loro sentiranno che stanno rendendo un servizio utile alla famiglia.

L’addizione ha solo due “leggi”: la proprietà commutativa, secondo cui qualunque sia l’ordine degli addendi la somma non cambia ($3 + 5 = 5 + 3$), e la proprietà associativa, per cui si possono raggruppare gli addendi come si vuole e il risultato non cambia. Per addizionare $3 + 5 + 7$, non importa se si somma prima il 3 al 5, ottenendo 8, e poi il 7 (rappresentando quest’ordine mediante l’uso delle parentesi $[(3 + 5) + 7]$, o se si calcola prima $5 + 7$ e poi al totale si aggiunge 3 (il che verrà rappresentato come $[3 + (5 + 7)]$.

Mettete insieme queste due proprietà e i problemi di addizione diventeranno molto più facili. Il primo giorno dei miei corsi di matematica per insegnanti di scuola elementare chiedo sempre agli studenti di calcolare $25 + 89 + 75$ senza usare una calcolatrice e di alzare la mano quando hanno terminato. Faccio caso alla prima studentessa che alza la mano (si tratta per lo più di donne, il che rende il mio insegnamento molto piacevole, dato che il loro è un genuino desiderio di aiutare questi bambini a farsi strada nella vita), e immagino che in passato abbia fatto un lavoro in cui c’era da dare il resto. Spesso ci azzecco, perché chiunque abbia quel tipo di esperienza si servirà delle proprietà dell’addizione per raggruppare $25 + 75$ (totalizzando 100) e poi aggiungerà 89 al totale. Incoraggiate i vostri figli a servirsi di procedimenti simili, e fategli notare le possibilità di raggruppamento ogni volta che si presentano.

A portar via

Il principio base della sottrazione è il “portar via”: se da 10 dollari se ne portano via 3, quanti ne rimangono? È il resto che ricevete quando fate un acquisto e pagate con una banconota. Oggi non è facile come in passato insegnare ai bambini questo concetto a causa della diffusione massiccia delle carte di credito. Quando si fanno dei piccoli acquisti, però, come una barretta di cioccolato o un pacchetto di gomme, basta pagare con una banconota da un dollaro, perciò assicuratevi di avere questo taglio a portata di mano. Alcuni negozi stabiliscono delle soglie minime di spesa al di sotto delle quali non accettano carte di credito, perciò vi si presenteranno delle buone occasioni per insegnare la sottrazione servendovi del denaro in contanti.

Potete crearvi altre occasioni per insegnare le sottrazioni e le addizioni quando date ai vostri bambini la paghetta settimanale. Insegnate loro a tenere il conto delle spese e a presentarvi un rendiconto dettagliato a fine settimana, prima di ricevere la paghetta successiva. Questo servirà a raggiungere parecchi lodevoli obiettivi. Insegnerà ai vostri figli ad apprezzare il valore dei soldi, a servirsi dell’aritmetica in un contesto in cui dovranno usarla più tardi negli anni e anche a eseguire delle rudimentali pianificazioni di bilancio: se desiderano acquistare un lettore MP3, per riuscirci dovranno risparmiare una certa somma ogni settimana. Servirà anche a raggiungere uno scopo non proprio ammirevole, ma che senza dubbio tornerà loro utile nel corso della vita: gli insegnerà a truccare i libri contabili. Non dico che sia un’attività encomiabile, però sicuramente li farà diventare più abili nei calcoli.

Ho detto prima che la combinazione di addizione e sottrazione permette di svolgere operazioni aritmetiche in modo molto più semplice di quanto potrebbe apparire a prima vista. Ad esempio, non sommerei mai direttamente \$2,34 a \$1,88; invece penserei a \$1,88 come \$2,00 – \$0,12 e in primo luogo aggiungerei \$2,34 a \$2,00, per poi sottrarre \$0,12 dal risultato, ottenendo \$4,22. Questo trucchetto fa restare a bocca aperta i miei studenti (inclusi quelli dei corsi più complessi come quello di calcolo): la gran parte di loro probabilmente affronterebbe il problema nel modo in cui è scritto, anche se non è permesso l'uso della calcolatrice. Forse sono così abituati a servirsene che affrontano il calcolo nello stesso modo. In ogni caso aumentare la capacità di risolvere simili problemi agevolmente servendosi delle tecniche di raggruppamento renderà più facile anche la comprensione dell'algebra, che ne fa largo uso.

Potete insegnare ai vostri figli a pensare ai numeri negativi come a debiti: il numero – 5 equivale a un debito di \$5. La proprietà fondamentale dei numeri negativi, cioè che 5 + – 5 = 0, è facile da afferrare in un contesto monetario. In altri termini, chi possiede \$5 è in grado di pagarli per cancellare un debito equivalente. Ci sono altri modelli di riferimento adatti a visualizzare i numeri negativi, ma questo è il più pratico e quasi sicuramente quello utilizzato nel Kansas del diciannovesimo secolo.

Procuratevi un quarto di dollaro

È un buon metodo per acquisire familiarità con l'addizione e la sottrazione di numeri inferiori a 100. Quando ero giovane, con un centesimo si poteva spedire una cartolina, ma al giorno d'oggi non basta a comprare niente, salvo quelle offerte per cui «paghi uno a prezzo pieno e con un centesimo in più, prendi due». Ormai siamo quasi arrivati al punto che anche un nichelino[4] o dieci centesimi non servono a molto: non bastano per chiamare da una cabina telefonica (che comunque non si trova più) e i parchimetri di Santa Monica accettano solo quarti di dollaro, come fanno tutte le lavanderie a gettoni. Quindi, possedere delle monetine da un quarto diventa conveniente e ci sono molti modi per accumularle.

Quando fate degli acquisti e pagate in contanti, se andate nel negozio con ventiquattro centesimi spicci (una monetina da dieci centesimi, due nichelini e quattro centesimi), potete dare al commesso una somma che vi faccia dare nel resto almeno una monetina da un quarto. Per esempio, se dovete pagare \$1,68 e date al commesso \$2,18, avrete diritto a cinquanta centesimi di resto. Dato che oggigiorno i mezzi dollari sono quasi scomparsi, riceverete due quarti di dollaro. Prima dell'avvento dei registratori di cassa elettronici, che calcolano il resto automaticamente, di quando in quando ricevevo dai commessi occhiate perplesse («Che vuoi che ne faccia di questi?») finché lui o lei non capivano che stavo cercando di avere come resto delle monetine da un quarto. Ora non ricevo più quelle occhiate perplesse; i commessi si limitano a prelevare la somma indicata dal registratore di cassa: un'altra causa del declino delle capacità aritmetiche nel ventunesimo secolo.

Andate e moltiplicate

La transazione commerciale per eccellenza è l'acquisto di un certo numero di articoli che hanno lo stesso prezzo. Scommetterei che è per questo che vennero inventate la moltiplicazione e le tabelline. Probabilmente qualche mercante babilonese si ritrovò un giorno a vendere otto vasi di terracotta a 4 soldi l'uno e si stufò di dover sommare 4 per otto volte, perché capì che una simile situazione si sarebbe ripresentata. Sia come sia, è in circostanze simili che si usa soprattutto la moltiplicazione.

Più grande è un bambino, più dovrebbe essere in grado di affrontare moltiplicazioni complesse, e lo stesso vale per tutte le altre operazioni. Le tabelline permettono di eseguire calcoli semplici, ma quando si passa a quelle più complesse è necessario che i bambini ne comprendano il procedimento. Ciò ci fa giungere alle proprietà della moltiplicazione e, soprattutto, all'algoritmo per moltiplicare numeri a due o più cifre.

La moltiplicazione ha due proprietà, analoghe a quelle dell'addizione. L'ordine dei fattori non ha importanza: $8 \times 4 = 4 \times 8$. Anche moltiplicando tre numeri, è indifferente l'ordine in cui vengono moltiplicati: $3 \times (5 \times 7) = (3 \times 5) \times 7$. C'è una terza proprietà, però, quella distributiva, che riguarda sia l'addizione che la moltiplicazione, ed è questa che i bambini devono capire per comprendere a pieno il procedimento.

Se un hamburger costa 3 dollari e un milkshake 2, e ne comprate quattro di ognuno, potrete calcolare il totale in due modi diversi: calcolando il costo degli hamburger ($4 \times \$3$) e quello dei milkshake ($4 \times \$2$) separatamente e sommandoli fra loro, ottenendo $4 \times 3 + 4 \times 2 = 12 + 8 = 20$, oppure calcolando il costo di un hamburger più quello di un milkshake ($3 + 2$) e moltiplicandolo per quattro: $4 \times (3 + 2) = 4 \times 5 = 20$. Una banconota da \$20 sicuramente non ha più il valore di un tempo. Ad ogni modo, la proprietà distributiva afferma che $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Credo che una delle prime cause del minore entusiasmo dei bambini verso la matematica sia la comparsa dell'algoritmo di calcolo della moltiplicazione a più cifre: richiede un po' di tempo per essere appreso ed è il primo procedimento che a loro sembra proprio misterioso. Vale la pena di passare un po' di tempo con i vostri figli per far capire loro cosa succede davvero quando si moltiplicano numeri a due cifre nel modo tradizionale, dato che si tratta di un procedimento del tutto logico e per niente difficile. Consideriamo la moltiplicazione 37×43, servendoci dapprima di varie leggi dell'aritmetica e infine vedendo come l'algoritmo tradizionale le riunisca tutte:

$37 \times 43 = (30 + 7) \times (40 + 3)$, nessuna novità
$= 30 \times (40 + 3) + 7 \times (40 + 3)$, proprietà distributiva
$= 30 \times 40 + 30 \times 3 + 7 \times 40 + 7 \times 3$, di nuovo
$= 1200 + 90 + 280 + 21$, raggruppando e sommando
$= 1591$

A proposito, spero abbiate sommato gli ultimi quattro numeri cominciando da $280 + 21$, perché si raggruppano naturalmente per dare 301.

Ora esaminiamo l'algoritmo tradizionale.

$$
\begin{array}{r}
43 \\
\times\,37 \\
\hline
301 \\
129 \\
\hline
1591
\end{array}
$$

Naturalmente, si tratta di qualcosa di già visto: è $7 \times (40 + 3) = 301$. E poi $30 \times (40 + 3) = 1290$, solo che l'ultimo 0 non viene scritto, ma viene lasciato uno spazio vuoto. Il totale è 1591.

Una volta superato il fatto dello zero invisibile (non scriverlo serve semplicemente a risparmiare tempo), generalmente non esistono altre difficoltà. A proposito, per spiegare questo procedimento potete servirvi di soldi finti, quelli che si usano per i giochi, ma è meglio che scegliate numeri bassi, come 13 × 22, per non dover passare un'ora a fare 43 mucchietti da $37.

Io ho scelto 43 × 37 perché è un esempio di una formula algebrica fondamentale, parte della quale può essere utilizzata come scorciatoia nelle moltiplicazioni. La formula è $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$, utilizzata in algebra per fattorizzare una differenza di quadrati ma che può anche essere usata per moltiplicare rapidamente dei numeri, se si ha fortuna, come accade in questo caso, dato che abbiamo numeri esprimibili come $a + b$ e $a - b$ con valori facilmente calcolabili di a^2 e b^2. In questo caso, $43 = 40 + 3$ (dove $a = 40$ e $b = 3$) e $37 = 40 - 3$, quindi $43 \times 37 = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$.

Per dimostrare ai vostri figli che $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$ potete servirvi di una piacevole dimostrazione geometrica. Prendete un quadrato i cui lati siano di lunghezza a, e ritagliate un quadrato più piccolo, i cui lati siano di lunghezza b, partendo da uno dei vertici; l'area fisica di quest'oggetto sarà $a^2 - b^2$. Ora avrete ottenuto una superficie a L formata da un piccolo rettangolo sopra un rettangolo più grosso; ritagliate il rettangolo piccolo. Avrete due rettangoli, uno di lati a e $a - b$, l'altro di lati b e $a - b$. Posizionateli di modo che i lati di lunghezza $a - b$ si trovino affiancati; avrete creato così un nuovo rettangolo di lati $(a + b)$ e $(a - b)$, la cui area sarà $(a + b) \times (a - b)$. Sono sicuro che questo e tantissimi altri trucchetti ci sono su CoolMath.com... e con *molte* più figure.

Un'ultima cosa: credo che i bambini, una volta raggiunti i dieci anni, dovrebbero essere in grado di eseguire qualsiasi moltiplicazione a due cifre *a mente*; per moltiplicare 73 × 84, visualizzatelo come $(70 + 3) \times (80 + 4) = 5600 + 240 + 280 + 12 = 6132$. A quell'età conoscono a memoria le parole di tutte le canzoni preferite, quindi non è chiedere troppo. Se sarete capaci di farglielo fare, tante delle operazioni algebriche per loro diventeranno una passeggiata: il concetto sarà lo stesso appreso per l'aritmetica.

Divide et impera

Per migliorare le conoscenze matematiche dei vostri figli nulla è più importante che fargli prendere dimestichezza con le divisioni. Sebbene il *divide et impera* fosse la strategia politica del senato romano, concepita per rendere eterno l'impero, se i vostri figli impareranno a dividere – e, soprattutto, impareranno a cosa serve la divisione – quasi certamente vinceranno qualsiasi problema di matematica gli si presenti.

Mi stupisce quante poche persone capiscano davvero lo scopo delle divisioni. Questo probabilmente spiega il fatto che anche il numero di coloro che si sentono a proprio agio con la matematica sia relativamente basso. Ho già detto che un paio di anni fa tenevo un corso di algebra a livello universitario per gli studenti dell'*Honors Program* del nostro istituto. Pensavo che quel corso sarebbe stato terreno fertile per capire che familiarità avesse con le divisioni uno studente diplomato in gamba che non seguisse uno specifico indirizzo matematico. Nel test che assegnai, incentrato sulle percentuali, feci la seguente domanda: qual è lo scopo della divisione? Su una classe di quindici elementi, tredici diedero una risposta quasi identica: la divisione è quando dividi il numeratore per il denominatore.

Rispondereste alla domanda «A che serve parlare?» dicendo «parlare è quando si pronunciano delle parole»? Naturalmente no; vi è chiara la differenza fra pronunciare parole – l'aspetto *meccanico* della parola – e lo scambio di opinioni, la formulazione di domande, l'espressione di sentimenti, che rappresentano *lo scopo* della parola. Ma la maggior parte delle persone, inclusi i miei studenti, non riconoscono la differenza fra i *meccanismi* della divisione e il suo *scopo*.

Lo scopo principale della divisione è distribuire un certo numero di elementi nel modo più equo possibile. Esistono due diversi modelli di divisione, ma rappresentano soltanto due facce della stessa medaglia. Un'interpretazione dell'equazione 12 : 4 = 3 è che, se dividiamo dodici biscotti fra quattro ragazze, ognuna di loro ne otterrà tre. In questo caso, il numero di elementi da distribuire e il numero dei destinatari sono noti; il problema è determinare quanti elementi vanno a ciascun destinatario. L'altra interpretazione di 12 : 4 = 3 è che, se abbiamo dodici biscotti da distribuire e abbiamo deciso di darne quattro a ogni ragazza, possiamo darne solo a tre di loro. In questo caso, il numero degli elementi che devono essere distribuiti e il numero di elementi da dare a ciascun destinatario sono noti, e il problema è determinare il numero dei destinatari.

E se nelle situazioni precedenti avessimo avuto solo undici biscotti? Se cercassimo di darne in numero uguale a quattro ragazze, dopo averne distribuiti due per ciascuna, ce ne rimarrebbero tre (3 = 11 – 4 × 2). O dovremmo spezzarli (entrando nel mondo delle frazioni), oppure semplicemente ci dobbiamo accontentare di dire che ogni ragazza riceverà due biscotti e ne avanzeranno tre; questo si scriverà: 11 : 4 = 2 R 3. Allo stesso modo, se decidiamo di dare quattro biscotti a ogni ragazza, riusciremo a darli a due di loro (di nuovo calcolando 2 × 4 = 8 biscotti), ma le altre due non riceverebbero niente, e rimarrebbero tre biscotti; di nuovo scriveremo 11 : 4 = 2 R 3. Osserviamo che, sebbene il numero 2 sia la quantità di biscotti dati a ciascuna ragazza nel primo esempio e il numero delle ragazze che ricevono i biscotti nel secondo, in ogni caso il numero dei biscotti che rimangono è uguale a 3.

Entrambi i problemi (12 : 4 = 3 e 11 : 4 = 2 R 3) rappresentano ciò che comunemente chiamiamo "divisione a una cifra". Di solito gli studenti non incontrano grandi difficoltà con la divisione a una cifra, perché richiede solo la conoscenza delle tabelline e la capacità di utilizzarle. Per calcolare 12 : 4 bisogna pensarlo come la risposta alla domanda: «Se doveste creare gruppi da quattro, quanti ne formereste, dati 12 elementi?». Sappiamo che un'interpretazione di 3 × 4 = 12 è che 3 gruppi di 4 elementi danno in totale 12 elementi. Perciò, per risolvere 12 : 4 bisogna solo conoscere i multipli di 4 e sapere che sono necessari 3 multipli di 4 per arrivare a 12.

L'algoritmo esteso della divisione a una cifra

Solitamente, gli studenti cominciano a incontrare delle vere difficoltà nell'eseguire gli algoritmi con la divisione a più cifre. Il loro percorso sarà molto più facile se prima farete acquisire familiarità ai vostri figli con l'algoritmo esteso della divisione a una cifra, che riguarda il problema di dividere un numero a molte cifre per uno a una sola cifra: per esempio, 367 diviso 5.

Risolverò questo problema due volte, la prima servendomi di un modello monetario – distribuendo e cambiando, se necessario –, la seconda con carta e penna, e vedrete che sono esattamente la stessa cosa. È una buona idea avere a portata di mano dei soldi finti per svolgere il procedimento insieme a vostro figlio. Assicuratevi per quest'esempio di avere parecchie banconote finte da dieci dollari. Potete fabbricarveli da soli ritagliando dei rettangoli di carta, se non avete sottomano quelli del

Monopoli o simili.

Per dividere 367 per 5, iniziate con 367 dollari: 3 banconote da cento dollari, 6 da dieci e 7 da un dollaro. Procuratevi cinque oggetti che indichino delle persone: se avete delle foto di cinque persone diverse potete servirvi di quelle, o altrimenti procuratevi altrettante pedine o pezzetti di plastica colorata. Ora possiamo iniziare con i procedimenti di cambio e di distribuzione, lo scopo della divisione.

Ovviamente non potete distribuire equamente 3 banconote da cento dollari fra 5 persone, perché non ce ne sono a sufficienza. Cambiate le 3 banconote da cento con 30 da dieci. Ora ne avete 36 da dieci – le 6 iniziali e quelle appena ottenute cambiando i soldi – e 7 da un dollaro. Dato che $7 \times 5 = 35$ e $8 \times 5 = 40$, avete banconote da dieci dollari sufficienti a distribuirne 7 per ciascuno, ma non abbastanza affinché ognuno ne abbia 8. Quindi darete a ogni persona 7 banconote da dieci dollari; come abbiamo appena visto, questo vi permetterà di utilizzare 35 delle 36 banconote da dieci dollari, e quindi ve ne resterà una.

Non potete suddividere in parti uguali la banconota da dieci dollari fra 5 persone, quindi la cambierete con quelle da un dollaro. Adesso ne avete 17 da un dollaro: le 7 iniziali e le 10 ottenute cambiando i soldi. Dato che $3 \times 5 = 15$ e $4 \times 5 = 20$, ne avete a sufficienza per darne 3 per ciascuno, ma non per darne 4. Perciò distribuite a ogni persona 3 banconote da un dollaro, utilizzando così 15 delle vostre banconote e rimanendo con 2.

Avete finito. Ognuna della cinque persone ha 7 banconote da dieci dollari e 3 da un dollaro – 73 dollari – e a voi ne restano 2 da un dollaro. Avete appena terminato la dimostrazione pratica per cui $367 : 5 = 73$ R 2.

Ora diamo uno sguardo al procedimento con carta e penna; vedrete che ogni passo corrisponde a qualcosa che avete già fatto.

$$\begin{array}{r|l} 367 & \underline{5\quad} \\ & \\ & \end{array}$$

Proprio come 367 dollari sono 3 banconote da cento dollari, 6 da dieci e 7 da un dollaro, il numero 367 equivale a 3 centinaia, 6 decine e 7 unità. Non possono suddividersi in parti uguali 3 centinaia fra 5 destinatari, perciò cambierete le 3 centinaia con 30 decine. Aggiunte alle 6 decine di partenza, ne otterrete 36 decine. Notate che 36 costituisce le prime due cifre di 367. È questa la bellezza del sistema numerico decimale da noi utilizzato: già il modo in cui vengono scritti i numeri contiene in sé l'idea di suddivisione e di addizione. Perciò 367 può essere concepito come 3 centinaia, 6 decine e 7 unità, oppure 36 decine e 7 unità, o 367 unità.

Di nuovo, poiché $7 \times 5 = 35$ e $8 \times 5 = 40$, avete abbastanza decine da distribuirne 7 a ciascun destinatario, ma non abbastanza da darne 8. Quando ne date 7 a ogni persona, utilizzate 35 delle 36 decine, rimanendo con una. Ciò si scrive così:

$$\begin{array}{r|l} \overset{\frown}{36}7 & \underline{5\quad} \\ \underline{35} & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Non potete suddividere in parti uguali 1 decina fra 5 destinatari, quindi la cambiate con 10 unità. Aggiunta alle 7 che già avevate, darà: $10 + 7 = 17$. La decina rimasta in fondo equivale a 10 unità, e quando “abbassate” il 7, state semplicemente sintetizzando l’idea che 1 decina più 7 unità = 10 unità più 7 unità = 17 unità.

$$\begin{array}{r|l} 367 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{35} & 7 \\ 17 & \end{array}$$

Abbiamo quasi finito. Poiché 3 × 5 = 15 e 4 × 5 = 20, possiamo dare 3 unità a ciascun destinatario, ma non 4. Distribuendo a ciascun destinatario 3 unità, se ne utilizzano 15, ma ne rimangono 17 – 15 = 2 unità. Ecco come si scrive:

$$\begin{array}{r|l} 367 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{35} & 73 \\ 17 & \\ \underline{15} & \\ 2 & \end{array}$$

E questo è il modo per dimostrare che 367 : 5 = 73 R 2. La dimostrazione “fisica” può essere svolta senza che sia necessaria alcuna conoscenza delle tabelline. Per esempio, se avete 36 banconote da dieci dollari, potete semplicemente distribuirle una alla volta fra 5 persone; alla fine di questo procedimento, ognuno avrà ricevuto 7 banconote (potete contare i singoli mucchietti di banconote per verificare) e a voi rimarrà una banconota da dieci dollari. Naturalmente, la conoscenza delle tabelline velocizza considerevolmente il processo, ragione per cui le linee guida per l’insegnamento della matematica in California ne prevedono una conoscenza tale da farne un uso automatico.

La divisione a più cifre

Se avete acquisito una familiarità con le divisioni a una cifra, non dovreste incontrare molte difficoltà con la divisione a più cifre, dato che l’idea alla base è esattamente la stessa. La sola vera differenza è che calcolare le singole cifre potrebbe sembrarvi un po’ più difficile, dato che non potrete fare affidamento sulla conoscenza a memoria della tavola pitagorica. Dovrete anche avere una familiarità con la moltiplicazione di numeri a molte cifre per un numero a una sola cifra, ma a parte questo, non cambia niente. Si tratta sempre di cambio e distribuzione. Dividiamo 619.853 per 814; difficilmente vostro figlio incontrerà una divisione con più cifre.

Se riuscite a fargli risolvere un’operazione del genere, su questo fronte siete fuori pericolo.

$$\begin{array}{r|l} 619853 & 814 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Dato che 814 è maggiore di 619, cambiamo le 619 migliaia con 6190 centinaia, che aggiunte alle 8 del numero originario, daranno 6198 centinaia.

Se guardiamo alla prima cifra di 814 e alle prime due cifre di 6198, ci facciamo un'idea di quali dovrebbero essere le prime cifre della soluzione; è qui che la familiarità con i numeri aiuta a velocizzare il procedimento.

Poiché $8 \times 8 = 64$, allora 8×814 sarà più di 6400, il che ci suggerisce di provare a usare il 7 come prima cifra. Poi moltiplichiamo 7 per 814 e lo sottraiamo a 6198.

$$\begin{array}{r|l} 619853 & \underline{814} \\ \underline{5698} & 7 \\ 500 & \end{array}$$

Ognuna delle 814 persone ha ricevuto 7 centinaia della quantità di partenza di 6198 centinaia, il che ci porta a 5698 centinaia, con il resto di 500 centinaia – che cambiamo con 5000 decine. Aggiunte alle 5 decine iniziali abbiamo 5005 decine, come vediamo "abbassando" il 5.

$$\begin{array}{r|l} 619853 & \underline{814} \\ \underline{5698} & 7 \\ 5005 & \end{array}$$

Di nuovo, considerando la prima cifra di 814 e le prime due di 5005 proviamo il 6 come cifra successiva. Di quando in quando, può capitare di fare la scelta sbagliata; se il divisore fosse 844, invece di 814, moltiplicando 6 per 844 otterremmo un numero maggiore di 5005.

Uno studente capace di fare calcoli mentali, saprebbe "vedere" che in quel caso è così e si renderebbe conto che il 6 non va bene, quindi userebbe il 5, risparmiando tempo e consegnando un compito più ordinato, se si trattasse di un compito in classe. Stavolta, però, il 6 come cifra successiva va bene.

$$\begin{array}{r|l} 619853 & \underline{814} \\ \underline{5698} & 76 \\ 5005 & \\ \underline{4884} & \\ 121 & \end{array}$$

Ognuna delle 814 persone ha ricevuto 60 delle 5005 decine originarie, il che fa 4884 decine, perciò ne rimangono 121, che cambiamo con 1210 unità.

Aggiunte alle 3 iniziali, fanno 1213 unità, come vediamo "abbassando" il 3.

$$\begin{array}{r|l} 619853 & \underline{814} \\ \underline{5698} & 76 \\ 5005 & \\ \underline{4884} & \\ 1213 & \end{array}$$

Come potrete facilmente notare, possiamo dare solo un'unità a ognuna delle 814 persone, e questo completa il calcolo.

$$\begin{array}{r|l} \overset{\frown}{619853} & 814 \\ \cline{2-2} \underline{5698} & 761 \\ 5005 & \\ \underline{4884} & \\ 1213 & \\ \underline{814} & \\ 399 & \end{array}$$

Perciò il risultato sarà 761 con un resto di 399.

Le medie

Avete visto quanto siano importanti le medie, vi abbiamo fatto riferimento in tutto il libro. E siccome avete letto il capitolo sulle statistiche, sapete che la media è il valore medio dei dati considerati. Se comprate 2 chili di mele a $1,60 al chilo e 3 chili per $1,20, avrete comprato 5 chili di mele per una somma totale di $6,80. Il costo medio di ogni chilo sarà di $1,36 (=$6,80/5).

Abbiamo visto che la divisione rappresenta una distribuzione di elementi in parti uguali fra un certo numero di destinatari. Nell'esempio precedente, la media di $1,36 può essere considerata come il risultato della distribuzione del costo totale di $6,80 fra 5 chili di mele. Una media è anche un quoziente che consiste di un numeratore e un denominatore. Quando si ha a che fare con quantità del mondo reale, i numeratori e i denominatori vengono misurati in unità. Nell'esempio precedente, le unità al numeratore sono dollari, e quelle del denominatore chili. Per capire a pieno una media, bisogna sapere cosa si sta distribuendo e fra chi lo si sta distribuendo. Come indicato in precedenza, le unità distribuite sono dollari (le unità al numeratore) e i chili sono le unità al denominatore fra cui i dollari vengono distribuiti. Le unità di misura delle medie sono "le unità del numeratore alle unità del denominatore"; in questo caso, dollari al chilo.

Nell'esempio precedente, la media di $1,36 può considerarsi la risposta a questa domanda: se 5 chili di mele hanno un costo totale di $6,80, quanti dollari costerebbe un chilo se ognuno di essi avesse lo stesso costo? Formulato in questo modo, il calcolo di una media è un problema di divisione: $6,80 : 5 = $1,36.

Eppure è possibile pensare ai problemi di divisione come moltiplicazioni al contrario; se ogni chilo di mele costa $1,36, 5 chili costeranno $6,80. Ciò viene espresso tramite l'equivalenza seguente:

5 × $1,36 = $ 6,80.

Se pensate a $6,80 : 5 come al numero che deve essere moltiplicato per 5 per dare $6,80 come risultato, avrete un modo alternativo di considerare la divisione.

Le unità utilizzate per descrivere una media sono una parte fondamentale delle informazioni trasmesse dalla media stessa. Quando calcolate una media, il numero risultante di per sé non ha significato: le unità di numeratore e di denominatore devono essere specificate. Per capire quanto ciò sia importante, chiedetevi se accettereste un lavoro il cui salario venisse descritto soltanto con il numero "5". Immaginando che si tratti di un compito spiacevole o pericoloso, quasi certamente lo accettereste se il salario fosse di 5 dollari al secondo. Molto probabilmente non lo accettereste, se la paga fosse di cinque centesimi all'anno.

Riassumendo il passato, prevedendo il futuro

Nel capitolo sulle statistiche, abbiamo notato che la media è la misura più utile di una quantità centrale, ed è sempre utilizzata per calcolare i prezzi medi. Potreste sentir parlare del valore mediano di una casa, ma mai del costo mediano di un chilo di mele o di un litro di benzina.

Utilizzare le medie passate per delle stime future è una pratica comune. In statistica, le verifiche di ipotesi e gli "intervalli di confidenza"[5] cominciano con un compendio dei dati passati, in forma o di proporzione o di media, utili come base per descrivere il valore di un parametro per un'intera popolazione. Pensate ai dati raccolti come a un campione di una parte di popolazione che costituisce l'intera serie di dati – passati, presenti e futuri – e capirete come le statistiche si servano delle medie passate e le usino per calcolare quelle future.

Esistono molti approcci diversi ai problemi che comportano l'uso delle medie. Per esempio, supponiamo che Bob abbia bisogno di vendere ogni mese attrezzature informatiche per un costo medio di 20.000 dollari per aver diritto a un bonus. Nei primi 8 mesi dell'anno, ha totalizzato in media $18.000 al mese. Ci sono due modi diversi per calcolare quanto dovrà realizzare negli ultimi 4 mesi per aggiudicarsi il bonus. Il modo più semplice è rendersi conto che in un anno intero avrà bisogno di vendere per un minimo di 12 × $20.000 = $240.000. Perciò dovrà vendere attrezzature per $240.000 – $144.000 = $96.000 in 4 mesi, per una media di $96.000 : 4 = $24.000 al mese.

L'approccio che segue è un po' più sofisticato ma richiede calcoli più semplici. Nei primi 8 mesi, Bob è rimasto $2000 al di sotto della sua quota, quindi complessivamente si trova sotto di 8 × $2000 = $16.000. Deve recuperarli in 4 mesi, a una media di $16.000 : 4 = $4000 al mese. In altre parole, negli ultimi 4 mesi deve superare la quota di partenza di $4000 mensili e quindi deve riuscire a vendere $20.000 + $4000 = $24.000 di attrezzature al mese.

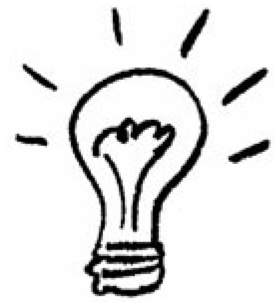
Altre medie facili da calcolare sono i parametri associati con le vite dei vostri figli. Qual è il tempo medio che impiegano per tornare a casa a piedi da scuola? Quante ore al giorno guardano in media la televisione? Il numero medio di ore che passano al giorno su Internet? Non serve trasformare i vostri figli in analizzatori e raccoglitori di dati (ok, diciamolo, in nerd). Se però sentite che c'è bisogno di fare qualche cambiamento, potete dire una cosa del tipo: «Riduciamo il tempo che passate a guardare la televisione a una media di due ore al giorno ogni settimana». In questo modo i vostri figli potranno organizzarsi se desiderano guardare qualche particolare programma che duri più di due ore.

Per finire, dato che le medie occupano un posto tanto importante nei notiziari, prendete l'abitudine di esaminare i fatti del giorno insieme ai vostri figli, facendo particolare attenzione alle medie. Questo ha un duplice obiettivo: aiuta a rinforzare i concetti matematici richiesti (non scordate di specificare cosa sono le unità del denominatore e del numeratore ogni volta che vi imbattete in una media) e ha una valenza civica, perché rende consapevoli i bambini degli eventi che li circondano. Nel tempo che i vostri figli impiegheranno a capire il funzionamento delle medie, avranno anche assorbito e compreso quanto accade nel mondo. La comprensione di come le medie riflettano quanto succede nella vostra città, nel vostro Stato, nel Paese e nel mondo li farà diventare più bravi in matematica e li aiuterà a diventare dei cittadini.

Un ultimo consiglio

Ovviamente, ci sono molte altre cose da fare per approfondire la conoscenza della matematica rispetto a quelle di cui ho parlato qui. Ma come disse un poliziotto a un uomo con il violino in mano che gli chiedeva come arrivare alla Carnegie Hall: «Ci vuole esercizio».

Vivete a lungo e calcolate. Insegnate ai vostri figli a fare i calcoli. È un buon modo per assicurarvi che voi – e loro – possiate prosperare.



[1] Società multinazionale di revisione dei bilanci. Fu coinvolta nel 2002 nel processo Enron, in quanto revisore del bilancio della società protagonista di uno dei più grandi crac finanziari americani (*n.d.t.*).

[2] *Walden; or Life in the Woods* , Ticknor & Fields, Boston 1854 (trad.it. *Walden*, *ovvero la vita nei boschi*, BUR, Milano 1964), è un'opera autobiografica di henry David Thoreau, filosofo e scrittore statunitense, pubblicata nel 1854 (*n.d.t.*).

[3] Vedi *Mathematics Content Standards for California Public Schools: Kindergarten through Grade Twelve* , California Department of Education, www.cde.ca.gov/be/st/ss/documents/mathstandard.pdf.

[4] Un nichelino equivale a cinque centesimi (*n.d.t.*).

[5] In statistica spesso non basta dare un solo valore quando si stima un parametro. In questi casi è opportuno fornire, oltre quello stimato, un intervallo di valori plausibili per quel parametro, che viene definito "intervallo di confidenza" o "di fiducia" (*n.d.t.*).

12
Come la matematica può aiutare a evitare i disastri

Cosa ha causato il disastro dello space shuttle *Challenger*? • Come avremmo potuto prevenire molti danni causati dall'uragano *Katrina*? • Come si può stimare il costo di un disastro?

Sembra proprio che le grandi lezioni della vita, che si parli di individui o di società, siano sempre accompagnate dal dolore. Quando le cose filano lisce, ci crogioliamo nell'alone di luce che avvolge il successo. Le commissioni federali raramente vengono formate per indagare sulle cose andate bene: indagano solo su quelle finite male. Tre dei maggiori disastri dell'ultimo quarto di secolo sono stati accompagnati da una grande sofferenza, e tutti avrebbero potuto essere evitati, o molto limitati, se solo qualcuno avesse fatto ricorso alla matematica.

28 gennaio 1986

L'alba spuntò chiara e fredda sulla Florida. Il lancio dello space shuttle *Challenger* in origine era stato fissato per il 22 gennaio, ma si era verificata una serie di ritardi per cui venne rimandato al 28, che fu anche il giorno del discorso sullo Stato dell'Unione pronunciato da Reagan.

Le basse temperature erano fonte di considerevole preoccupazione per gli ingegneri della Morton Thiokol, l'azienda responsabile della costruzione dei propulsori a carburante solido dello shuttle. La sera precedente si era tenuta una teleconferenza fra la Thiokol e il personale della NASA, durante la quale gli ingegneri avevano espresso preoccupazione riguardo alla resistenza degli anelli a O gommati usati come guarnizioni per sigillare i giunti dei propulsori. Si trattava di una questione seria, perché gli anelli ad O erano componenti a "criticità 1": in caso di cedimento, avrebbero determinato la perdita del *Challenger* e degli astronauti a bordo. Le obiezioni degli ingegneri, però, vennero respinte dai dirigenti della Thiokol, che insistettero perché il lancio avvenisse come da programma.

Prima del lancio, venne anche notato uno strato di ghiaccio sulla struttura di servizio eretta accanto al veicolo, ma andando avanti nella giornata, cominciò a sciogliersi. Il lancio venne ritardato fino alle 11:38 del mattino, ora della Florida.

Il programma spaziale mi ha sempre interessato molto e avevo deciso di assistere alla trasmissione dal mio appartamento di Los Angeles. Quel mattino, però, avevo lezione e dovetti uscire prima del lancio del *Challenger*. Come gran parte della nazione, venni a sapere quanto era accaduto poco dopo il verificarsi della tragedia[1]. Ancora oggi non riesco a guardare il video del lancio, anche se è successo più di venti anni fa.

23 settembre 1998

Le opzioni sono un tipo molto importante di contratto. Un'opzione d'acquisto offre il diritto, senza alcun obbligo, di comprare qualcosa a un determinato prezzo un certo giorno o entro quel certo giorno. Una società cinematografica, valutando la possibilità di produrre un film in cui Angelina Jolie sarebbe perfetta per il ruolo principale, potrebbe acquistare un'opzione per i suoi servizi. Un contratto del genere potrebbe essere formulato come segue: la società paga ad Angelina Jolie 1 milione di dollari per il diritto di farle sottoscrivere un contratto come protagonista del film, ruolo per il quale l'attrice percepirà 15 milioni di dollari; tale diritto decade il 1 gennaio 2011. La società alla fine potrebbe decidere di non fare il film, ma il milione di dollari è l'assicurazione che, qualora lo faccia, Angelina Jolie interpreterà il ruolo principale per 15 milioni di dollari. È un accordo conveniente, perché l'attrice ne ottiene 1 milione extra (come se ne avesse bisogno!) qualora il film si faccia, altrimenti si tiene il suo milione e dopo quella data è libera di prendere altri accordi.

Le opzioni sui titoli (il diritto a comprare un titolo, ad esempio della Microsoft, a un certo prezzo ed entro una certa data) esistono da molto tempo, ma in origine i contratti erano accordi relativamente complicati, negoziati fra acquirente e venditore. La stessa compravendita dei titoli funzionava così, prima dell'esistenza della Borsa valori. Eppure l'interesse verso le opzioni sui titoli come veicoli di investimento crebbe durante gli anni Cinquanta e Sessanta e i mercati delle opzioni nacquero all'inizio degli anni Settanta.

Nello stesso periodo, due brillanti economisti matematici, Fischer Black e Myron Scholes, trovarono un'espressione matematica per valutare un'opzione sui titoli. Le opzioni sui titoli mi interessavano e lessi l'articolo in cui i due studiosi spiegavano il loro risultato; si trattava di costruire e risolvere un'equazione differenziale, utilizzando ipotesi sulla neutralità del rischio equivalenti a quelle sulla conservazione dell'energia di cui si servono ingegneri e fisici quando creano modelli di sistemi fisici con le equazioni differenziali. Era geniale, ed esemplificava cosa rende la matematica uno strumento tanto potente: concetti appartenenti alle leggi della natura che possono essere espressi matematicamente corrispondono a concetti analoghi nel mondo della finanza.

Il modello di Black-Scholes, per un po', fu il Santo Graal degli operatori di Borsa nel mercato delle opzioni. Essi individuavano due opzioni il cui valore relativo non corrispondeva a quello teorico proposto dal modello di Black-Scholes, acquistavano quella svalutata e vendevano quella supervalutata, in attesa che il passare del tempo riallineasse i prezzi e permettesse loro di guadagnarci su. Anche se non aveva successo la singola transazione, se il modello era accurato sul lungo periodo, la legge delle medie (in questo caso, il fatto che ogni singola transazione avesse un valore atteso positivo) avrebbe fatto sì che i guadagni si accumulassero nelle mani dell'operatore.

Questo lavoro fruttò un Nobel in economia, e all'istituzione del fondo speculativo *Long-Term Capital Management* (LTCM) il cui consiglio di amministrazione includeva Scholes, Robert Merton (anch'egli vincitore di un Nobel per il suo lavoro in questo campo) e John Meriwether, uno dei maggiori *bond trader* della Salomon Brothers. L'LTCM era brillante come concezione: gli accademici dovevano fornire i modelli quantitativi per la formulazione di strategie borsistiche, e operatori dal *track record* impeccabile si dedicavano alle operazioni vere e proprie. L'investimento iniziale per essere ammessi era elevato – 10 milioni di dollari – ma si fecero avanti 80 investitori con la posta richiesta e l'LTCM iniziò a operare con un capitale di 800 milioni di dollari. La strategia di base era cercare titoli mal prezzati l'uno rispetto all'altro, non diversamente da come facevano gli operatori di Borsa per lo *spread* delle opzioni. Dato che queste differenze di quotazione erano basse, però, l'LTCM doveva acquistarne un gran numero per ricavarne qualche profitto, strategia che fu paragonata a «raccogliere nichelini di fronte a un rullo compressore». I primi due anni l'LTCM guadagnò il 40% e il terzo anno il 27%. Ormai gestiva 7 miliardi di dollari. Meriwether, però, restituì quasi 3 miliardi di dollari agli investitori perché non sembrava esserci un numero sufficiente di opportunità di investimento allettanti.

All'inizio del 1998, l'LTCM possedeva un capitale di 4 miliardi di dollari che, attraverso la leva finanziaria per l'acquisto di opzioni e contratti sui *futures*, controllava 100 miliardi di dollari in attività finanziarie. L'LTCM operava anche largamente sui mercati emergenti, come la Russia, una mossa che alla fine si dimostrò fatale. Il 17 agosto, la Russia svalutò il rublo e dichiarò una moratoria sul suo debito. Ciò ebbe un effetto catastrofico sull'LTCM, poiché non poté compiere le operazioni di riassestamento che le sue strategie di Borsa richiedevano. Giunti al 22 settembre, il suo capitale si era ridotto a 600 milioni di dollari, anche se ancora controllava un ampio portafoglio. Le richieste di maggiori capitali, il cosiddetto *margin call* (che avevano già giocato un ruolo fondamentale nell'innescare il crac della Borsa del 1929 e la conseguente Depressione) non poterono essere soddisfatte. Di solito, i *margin call* vengono soddisfatti liquidando dei beni, ma quelli dell'LTCM non potevano essere pagati. Ciò provocò il timore che si innescasse un tracollo sistemico, proprio come era accaduto nella centrale elettrica di Adam Beck nell'Ontario, in Canada, dove il guasto di un singolo relais aveva innescato il black-out che nel 1965 aveva paralizzato il Nord-est degli Stati Uniti. Il pomeriggio del 23 settembre, la Federal Reserve Bank cercò di intervenire in suo favore attraverso un consorzio di banche e di creditori dell'LTCM, che versarono al fondo quasi 4 miliardi di dollari. La cifra non sembrerà enorme, ma la scelta del momento fu decisiva, e il tracollo fu evitato[2].

29 agosto 2005

L'uragano *Katrina* non è stato il più devastante che abbia mai colpito gli Stati Uniti, e sicuramente non quello che ha mietuto più vittime, ma senza dubbio ha causato danni più ingenti e visibili di qualsiasi altra tempesta. L'immagine che la maggior parte di noi conserva di *Katrina* è quella di una New Orleans inondata a causa del cedimento dei cinquantatré argini che la circondavano. La città del carnevale venne trasformata quasi all'istante in uno scenario che molti americani associano alle catastrofi dei Paesi del terzo mondo. Sono passati anni e New Orleans non si è ancora ripresa, e perché lo faccia completamente ci vorranno decenni.

Finita la tempesta, sono state condotte numerose indagini alla ricerca della causa del cedimento degli argini[3]. L'American Society of Civil Engineers ("Società americana degli ingegneri civili"), in un rapporto del giugno 2007, arrivò alla conclusione che il cedimento era dovuto a una progettazione difettosa, ma lo U.S. Army Corps of Engineers ("Corpo degli ingegneri dell'esercito degli Stati Uniti"), responsabile della progettazione e della costruzione del sistema di argini, contestò il rapporto, obiettando che *Katrina* era stato straordinariamente forte. Questa obiezione venne respinta dagli investigatori della National Science Foundation ("Fondazione nazionale della scienza"), che fecero riferimento a uno studio condotto nel 1986 proprio dall'Army Corps of Engineers, nel quale si menzionava appunto la possibilità di cedimenti come quelli che si erano appunto verificati.

Le due domande fondamentali

Quando si verificano disastri della portata del *Challenger*, dell'LTCM e di *Katrina*, è facile analizzarli con il senno di poi. Di solito a posteriori vengono poste due domande fondamentali. La prima e la più ovvia è: «Si poteva fare qualcosa?». Quasi sempre la risposta è affermativa. Il lancio del *Challenger* avrebbe potuto essere rinviato. L'LTCM non avrebbe dovuto investire sul mercato russo. Gli argini di New Orleans avrebbero potuto essere rafforzati e i difetti di progettazione corretti.

Alla seconda domanda: «Si doveva fare qualcosa?», è più difficile dare risposta. Tutti e tre questi casi rappresentano la realizzazione delle ipotesi peggiori, ma se prendessimo ogni decisione in base al criterio di prevenire il peggio, la mattina non scenderemmo mai dal letto, dato che potremmo scivolare e battere la testa. Considerato che c'è la colazione ad aspettarci in cucina o in sala da pranzo e che per avere un letto dentro al quale dormire e una colazione da mangiare dobbiamo andare a lavorare, la maggior parte di noi corre il rischio di scivolare e farsi male poiché, dopotutto, ci sono pochissime probabilità che ciò accada. Ma anche quando le probabilità che qualcosa accada sono poche, a volte succede, e la matematica ha un modo per stabilire la condotta migliore da tenere mettendo in conto anche il peggio. Non dovrebbe sorprenderci sapere che un'analisi del valore atteso avrebbe potuto, e probabilmente avrebbe dovuto, far sì che in ognuna di queste situazioni venisse seguita la condotta migliore.

Un'analisi del valore atteso del disastro del *Challenger*

In seguito al disastro del *Challenger*, praticamente ogni aspetto della spedizione venne sottoposto ad attento esame e quasi a tutti i responsabili venne imputata una parte di colpa. C'è una teoria giuridica nota come "*last clear chance*" ("l'ultima occasione"), secondo la quale il convenuto contro cui è stata intrapresa un'azione legale non è ritenuto responsabile se l'attore ha avuto per ultimo la possibilità di evitare il danno. La possibilità di evitare il disastro era chiaramente nelle mani dei controllori della NASA che diedero l'autorizzazione finale. Essa, però, scaturì da informazioni insufficienti e comunicazioni insoddisfacenti. L'allora segretario di Stato William Rogers fu a capo della commissione che indagava sulla tragedia. La commissione concluse che «la carenza delle comunicazioni aveva portato alla decisione del lancio della missione 51-L sulla base di informazioni incomplete e a volte fuorvianti, di un conflitto tra i dati forniti dagli ingegneri e le decisioni dirigenziali, e di una struttura direttiva della NASA che aveva permesso che problemi di sicurezza relativi ai voli interni scavalcassero i manager a capo della missione»[4].

L'idea che comunicazioni carenti e informazioni trasmesse in modo sbagliato fossero state l'elemento cruciale per il verificarsi dell'incidente viene sostenuta da molti degli studi condotti sul disastro del *Challenger*. A me pare, però, che non sia questa la questione fondamentale. Naturalmente, si tratta di elementi importanti, ma anche il possesso di tutti i dati rilevanti non avrebbe, di per sé, evitato il verificarsi della tragedia. Il punto fondamentale riguarda l'elaborazione dei dati.

Certo, probabilmente se fosse stato comunicato con chiarezza ai controllori che gli ingegneri della Morton Thiokol ritenevano una seria possibilità il cedimento degli anelli a O qualora il lancio si fosse verificato a temperature inferiori agli 11,7° Celsius, questo sarebbe stato cancellato, o quantomeno rimandato. Eppure simili messaggi possono essere cambiati radicalmente trasformando o eliminando una sola parola. Se togliamo la parola “seria”, l’urgenza dell’avvertimento quasi scompare; e se quella parola viene trasformata in una “certa possibilità”, l’urgenza diventata opinabile.

I matematici hanno una soluzione per ovviare a tale problemi: quantificare in numeri! Comunicare il pericolo in termini di stima delle probabilità! Supponiamo che gli ingegneri della Morton Thiokol avessero comunicato una stima del 10% di possibilità che si verificasse un guasto catastrofico. Dato che l’equipaggio del *Challenger* consisteva di 7 persone, il valore atteso del lancio sarebbe ammontato a una perdita dei 7/10 di una vita umana. È molto più semplice cancellare un lancio quando ci si rende conto del costo in termini di vite umane. Se viene conteggiato anche il valore atteso in termini di soldi, una stima del 10% di possibilità di un disastro, che potrebbe essere tradotta qualitativamente come una “certa possibilità”, quasi di sicuro avrebbe evitato il disastro.

Un’analisi del valore atteso del disastro dell’LTCM

Per alcuni anni sono stato un operatore di Borsa nel settore delle opzioni. Non sono assolutamente abbastanza vecchio da ricordarmi del lunedì nero del 28 ottobre 1929, quando il Dow-Jones precipitò del 13% in un giorno, ma lo sono per ricordarmi del secondo lunedì nero: il 19 ottobre 1987, quando il Dow-Jones perse quasi il 23% in un solo giorno. Fu allora che vissi la mia mini-catastrofe personale. Avevo messo a punto una strategia, curiosamente simile a quella dell’LTCM di «raccogliere nichelini di fronte a un rullo compressore»; nei sei mesi in cui l’avevo applicata si era sempre rivelata vincente. All’epoca avevo un socio, e quando vide questa serie di successi, mi chiese cosa potesse far fallire la mia strategia. Con una sorta di preveggenza quasi spaventosa, gli dissi che il solo modo che mi veniva in mente sarebbe stato non poter liquidare le nostre quote sul mercato, e una cosa del genere, a quanto ne sapevo, non era mai accaduta nella storia delle opzioni (iniziata nei primi anni Settanta) e non si verificava in Borsa dal lunedì nero del 1929.

Naturalmente, fu proprio ciò che accadde. Le offerte scomparvero: nessuno voleva comprare quel che avevamo da vendere, e finimmo con il perdere una somma di denaro che impiegai otto anni per restituire. Allora appresi una lezione fondamentale: quando si crea una strategia, bisogna valutare la possibilità di non poterla mettere in atto. In quel caso, occorreva limitare in qualche misura le perdite. Sebbene da quel momento io abbia operato nel mercato delle opzioni con un discreto successo, non mi è mai capitato di prendere neanche in considerazione strategie che contemplassero una minima possibilità di perdite astronomiche. Non so se questo derivi da un’analisi inconscia del valore atteso o dal fatto che sono già rimasto scottato una volta ma, per quanto mi riguarda, tali strategie sono fuori discussione.

L’LTCM fu creato meno di dieci anni dopo il lunedì nero, quindi chiunque vi fosse collegato aveva senz’altro vissuto quell’esperienza, anche se forse a nessuno di loro era capitato l’imprevisto di non riuscire a operare. È possibile costruire una strategia che sia “perfettamente coperta”, in modo che anche nel caso in cui sia impossibile operare, il rischio sia limitato. Se avete speso 1000 dollari per un’opzione sull’acquisto di 100 barili di petrolio a $150 l’uno sul mercato dei *futures*, pronti per la consegna nel gennaio 2010, e ne avete ricevuti 600 per la vendita di un’opzione sull’acquisto di 100 barili di petrolio a $160 l’uno pronti per la consegna nello stesso periodo, il vostro rischio è limitato: se mai il petrolio dovesse arrivare a $300 al barile (che Dio ci aiuti), avrete totalizzato $600. Avete sostenuto una spesa netta di $400 comprando e vendendo le due opzioni, e con il petrolio a $300 al barile esercitereste la vostra opzione, acquistandone 100 barili a $15.000. La persona a cui avete venduto l'opzione si comporterà allo stesso modo, acquistando quei 100 barili di petrolio da voi a $16.000. Voi guadagnate $16.000 – $15.000 – $1000 + $600 = $600.

Se il petrolio scendesse a $20 al barile (che il Signore sia lodato), perdeste una somma di $400: la differenza fra il costo dell'opzione acquistata e il ricavato dall'opzione venduta, poiché né voi, né chi ha comprato da voi eserciterebbe l'opzione. Che senso ha esercitare un'opzione per acquistare petrolio a $150 al barile quando sul mercato potete procurarvelo a $20? Il vostro rischio e il vostro guadagno sono limitati quando comprate e vendete la stessa opzione a prezzi diversi. Ad ogni modo, è difficile credere che i dirigenti dell'LTCM, gli operatori di Borsa e gli economisti più in gamba del pianeta non riuscissero a inserire nei loro calcoli le conseguenze dell'impossibilità di operare. Il fatto che tutte queste menti brillanti e raffinate non abbiano eseguito il calcolo appropriato del valore atteso mette in evidenza ancora una volta uno dei grandi e ricorrenti errori concettuali: una bassa probabilità vuol dire una bassa probabilità. *Non* vuol dire zero probabilità.

Negli ultimi vent'anni, parecchi investimenti importanti si sono rivelati disastrosi. Alcuni, ma non tutti, hanno avuto origine dallo stesso tipo di situazione che causò il crollo dell'LTCM. Uno di questi, dalla vasta risonanza, è stata la bancarotta di Orange County in California nel 1994, contea con il più alto reddito pro-capite dell'intero Stato. La causa erano stati gli investimenti fallimentari in titoli rischiosi con un alto tasso di interesse operati dal tesoriere Bob Citron. A posteriori, la catastrofe non derivò dalla mancata conoscenza del valore atteso, ma dal modo in cui fu considerato. Verso la fine degli anni Settanta, la California approvò la *Proposition 13*, che limitava la capacità impositiva sulle proprietà da parte delle città e delle contee. Questo buco nelle entrate convinse Citron che il valore atteso di investimenti sicuri fosse insufficiente ai bisogni della contea. La sola alternativa che gli si presentò furono investimenti più rischiosi, ma ciò condusse all'effetto contrario, provocando perdite del valore di 1,7 miliardi di dollari.

Citron non era il primo operatore privo di scrupoli ad approfittare della possibilità di investire grosse somme senza dover rispondere a controlli adeguati. Nick Leeson fece investimenti rischiosi sul mercato dei *futures* che portarono al fallimento della prestigiosa Barings Bank nel 1991. All'inizio del 2008, la Société Générale subì una perdita di 7,2 miliardi di dollari (e voi pensavate che perdite di quel livello potessero avvenire solo per colpa di macchinazioni politiche di corrotti o incompetenti) per operazioni finanziarie non autorizzate fatte da Jerome Kerviel. Diversamente da Citron, responsabile dei fondi di investimento di Orange County, Leeson e Kerviel non occupavano posizioni di rilievo all'interno degli organismi cui appartenevano. Poiché fatti del genere si sono verificati, la probabilità che accadano non è uguale a zero. Di conseguenza, quando un'istituzione finanziaria mette in atto delle strategie di investimento, è necessario o ridurre a zero la probabilità che vengano compiute operazioni tanto sciagurate, o includere tale possibilità nel calcolo del valore atteso dell'impiego di tali strategie.

Un'analisi del valore atteso dell'uragano *Katrina*

Un'analisi del valore atteso del disastro del *Challenger* avrebbe quasi sicuramente salvato le vite di sette astronauti e uno space shuttle, ma quella di un progetto per rinforzare gli argini che circondavano New Orleans, fatta in seguito al rapporto del 1986 dell'Army Corps of Engineers, avrebbe potuto salvare centinaia di persone e una città.

Non ho trovato una previsione del costo (in dollari del 1986) di un progetto per rafforzare gli argini di modo che potessero resistere all'uragano *Katrina*. Né una stima del 1986 sulle probabilità che si verificasse una tempesta della sua forza. Ciò che *è* pubblicamente accessibile, invece, è il costo umano dell'uragano (più di 1800 vittime, decine di migliaia di vite distrutte), e i danni alle proprietà (più di 80 miliardi di dollari).

Katrina era una tempesta di enorme potenza, ma non senza precedenti. Si trattava del sesto uragano atlantico più forte mai documentato e del terzo per potenza che abbia mai colpito gli Stati Uniti. Esiste una banca dati sugli uragani (HURDAT) che risale al 1851 e che avrebbe consentito di fare una stima delle probabilità che se ne verificasse uno come *Katrina*[5]. Se la probabilità che una tempesta simile si abbattesse su New Orleans fosse stata di 1/1000, i danni avrebbero avuto un valore atteso di 100 milioni di dollari; se la probabilità fosse stata di 1/100, i danni avrebbero avuto un valore atteso approssimativo di 1 miliardo di dollari. Se non altro, per le città che possono essere colpite da uragani simili dovrebbe farsi almeno una qualche sorta di stima dei costi necessari a proteggersi dall'impensabile.

Come può essere d'aiuto la matematica

Tre catastrofi. La prima, quella del *Challenger*, poteva e doveva essere evitata. Non ci sono scuse per non servirsi della matematica quando farlo non presenta alcun svantaggio.

La seconda, quella dell'LTCM, avrebbe potuto forse essere evitata, ma la combinazione di circostanze che la causarono fu così insolita che un'analisi del valore atteso avrebbe potuto non accendere un segnale d'allarme. Un'analisi, però, avrebbe potuto portare alla consapevolezza che si stavano assumendo dei rischi potenzialmente illimitati, ma coloro a cui spettavano le decisioni avrebbero potuto non dargli alcun peso. Molte delle più grandi conquiste dell'umanità sono state accompagnate da rischi potenzialmente illimitati: il viaggio di esplorazione di Colombo ne è una chiara dimostrazione.

La terza catastrofe, l'uragano *Katrina*, dovrebbe servire come massimo esempio di quanto sia importante fare ricorso alla matematica. Se non sappiamo quale sarà il costo di una catastrofe, e il valore atteso ce ne fornisce il costo medio sul lungo termine, come possiamo decidere se vale la pena cercare di proteggerci?

Probabilmente, per molti sarebbe una sorpresa sapere che la città che al momento è ritenuta più a rischio per un cedimento degli argini non si trova né in una zona di uragani, né sull'oceano. Si trova, infatti, nel cuore della California. Sacramento è situata sulle sponde del fiume omonimo, poco più a sud della sua confluenza con l'American. Chi ama il cinema ricorderà alcune scene di *Indiana Jones e il tempio maledetto* girate su dirupi apparentemente a strapiombo su un fiume indiano; in realtà si trattava dell'American. L'uragano *Katrina* sollecitò una valutazione che portò alla consapevolezza di un serio rischio di cedimento degli argini, e di conseguenza a un progetto per il loro rafforzamento che avrebbe dovuto essere completato entro il 2010. A partire dal gennaio 2008, però, i lavori di rafforzamento degli argini andarono a finire all'interno dell'area in più rapida espansione di Sacramento e nel momento in cui scrivo la pubblica sicurezza e l'espansione economica non hanno ancora trovato un accordo.

Le due città

Chiuderò questo capitolo con la storia di due città a partire dall'estate e dall'autunno del 2007. È quasi come leggere il racconto della cicala e la formica, in cui la seconda si prepara all'inverno facendo provviste di cibo, mentre la prima fa baldoria come se fosse il 1999.

L'incendio nel canyon a Malibù iniziò verso le cinque del mattino del 21 ottobre. Malibù è una località costiera di lusso con alcuni abitanti famosissimi, molte ville belle e costose e una lunga storia di incendi devastanti. La contea di Los Angeles, come la formica, si era preparata a quest'eventualità noleggiando alcuni aerei antincendio per la stagione più a rischio. Si tratta di velivoli capaci di raccogliere grandi quantità di acqua dalle fonti più vicine, in questo caso l'Oceano Pacifico o perfino le piscine delle ville dei ricchi e famosi. Il noleggio di questi aerei non costa poco, ma dal punto di vista del valore atteso, è più che conveniente, considerata la frequenza con cui scoppiano gli incendi nel sud della California. L'incendio del canyon distrusse 22 edifici e vi rimasero ferite 3 persone.

San Diego, però, era tutt'altro che preparata. Piuttosto a sorpresa, le sue sole difese aeree consistevano di qualche vecchio elicottero della guerra del Vietnam. Anche se non è chiaro quali danni sarebbero stati evitati se la città fosse stata meglio equipaggiata per affrontare il fuoco al suo primo propagarsi, come diretta conseguenza dell'incendio finirono bruciati approssimativamente 500.000 acri, distrutti 1500 edifici e 9 vite andarono perdute.

Le lezioni del *Challenger*, dell'LTCM, di *Katrina* e di San Diego costituiscono un unico e semplice insegnamento: fate i vostri calcoli e servitevene intelligentemente. La matematica avrebbe potuto contribuire a prevenire due di questi disastri e a limitare i danni negli altri due casi; ma la matematica da sola non basta: ci vuole qualcuno che la applichi, e una volta applicata, bisogna fare del nostro meglio per utilizzare quanto si è appreso grazie a essa.

[1] Vedi *NASA History Division*, http://history.nasa.gov/sts51l.html. si tratta del sito ufficiale della nasa e contiene tutte le informazioni fondamentali, i rapporti e i link ai video, nel caso vi interessi guardarli.

[2] Per un testo eccellente sull'insuccesso dell'LTCM, vedi R. Lowenstein, *When Genius Failed*, Fourth Estate, London 2002.

[3] Vedi *New Orleans Hurricane Katrina Levee Failures*, http://matdl.org/failurecases/Dam%20Cases/new_orleans_hurricane_katrina_le.htm. Un sito che fa riferimento ai punti salienti dei rapporti più importanti.

[4] *Il rapporto della commissione rogers*, http://science.ksc.nasa.gov/shuttle/missions/51-l/docs/rogers-commission/table-of-contents.html.

[5] Vedi il sito web del Laboratorio oceanografico e meteorologico dell'atlantico, www.aoml.noaa.gov/hrd/hurdat/easyread-2008.html.

13
Come la matematica può migliorare la società

Qual è il valore in dollari di una vita umana? • Quando le questioni legali andrebbero risolte fuori dai tribunali? • Qual è la soglia oltre la quale le spese militari diventano superflue?

Poiché questo testo è incentrato sull'aritmetica, probabilmente non sorprenderà che molti campi a cui ne abbiamo applicato le tecniche siano collegate ai soldi. Il denaro è il mezzo attraverso il quale pratichiamo il commercio, ed è l'aritmetica che usiamo per tenere i conti delle nostre transazioni finanziarie.

Secondo il grande romanziere russo Lev Tolstoj, i governi sono associazioni di uomini che compiono violenze contro il resto di noi. Tolstoj sarà anche stato un anarchico, ma senza dubbio riassumeva i sentimenti di molti che provano irritazione contro i governi che gestiscono le città, gli Stati e i Paesi di cui facciamo parte. I conservatori toccano un nervo scoperto quando dicono che il governo è il problema, piuttosto che la soluzione.

Sicuramente, a volte i governi provocano danni consistenti e spesso potrebbero fare del bene più di quanto non facciano. In entrambi i casi, la matematica svolge un ruolo fondamentale. In questo capitolo si parla proprio dei vantaggi che la matematica potrebbe apportare, e del danno perpetrato dai governi ai cittadini che racchiude in sé una componente matematica. Probabilmente non stupirà che gran parte di questa storia riguardi la gestione – e la cattiva gestione – da parte dei governi di alcune situazioni finanziarie.

Il pompiere e il cibo per cani

Se non abitate a Los Angeles, difficilmente avrete sentito nominare Tennie Pierce. Tennie è stato al servizio della comunità per quasi un ventennio lavorando come pompiere. Un omone robusto di quasi due metri soprannominato *Big Dog*, "cagnaccio"[1]. Nelle partite di pallavolo – il passatempo preferito dai vigili del fuoco per tenersi in forma fra un incendio e l'altro – Pierce spesso esortava gli altri ad alzargli la palla, e il cagnaccio poi schiacciava e faceva punto.

Fra i vigili del fuoco vige una mentalità da confraternita studentesca, con tanto di nonnismo e scherzi goliardici. Pierce partecipava quasi sempre, spesso era uno degli organizzatori. Un giorno, però, alla caserma dei vigili del fuoco gli venne servito un piatto di spaghetti. Mentre Pierce mangiava, altri sghignazzavano, sapendo che i loro colleghi avevano messo nel sugo del cibo per cani. Avevano dato da mangiare al "cagnaccio" quanto gli spettava.

Da come andavano normalmente le cose in quell'ambiente, si potrebbe pensare che un incidente del genere venisse dimenticato in fretta. Infatti, al principio, Pierce non sembrò prendersela molto.

Ho scordato di menzionare che si tratta di un uomo di colore? Ho anche dimenticato di dire, ma sono certo che molti lettori lo sapranno già, che viviamo in un contesto in cui le cause per molestie sono diventate un vero business. Pierce fece causa alla città di Los Angeles per discriminazione razziale e mobbing da parte dei colleghi. La causa sarebbe stata discussa da un procuratore molto agguerrito. Temendo una condanna da parte di una "giuria di estrazione popolare" – e cioè per lo più nera, del tipo che prosciolse O.J. Simpsons durante il processo in cui era accusato di duplice omicidio – l'avvocato del Comune suggerì una conciliazione per 2,7 milioni di dollari. Il consiglio comunale votò a favore, 11 contro 1.

Tale decisione provocò un massiccio sollevamento pubblico, fomentato dai presentatori di un popolare programma radiofonico trasmesso nelle ore di massimo ascolto, che diffusero l'opinione che un simile accordo fosse una vera pazzia. Adeguandosi a quel sentimento di pubblico sdegno, il sindaco pose il proprio veto alla transazione. Di conseguenza, aumentarono le probabilità che la causa sfociasse in un processo. L'avvocato del Comune chiese una consulenza a uno studio legale esterno, che organizzò gruppi di discussione e processi simulati nel tentativo di determinare l'esito più probabile del giudizio. Il parere dello studio fu che la città avrebbe dovuto sottoscrivere l'accordo, poiché non era da escludere una sentenza che prevedesse un risarcimento dell'ordine dei 7 milioni di dollari.

La decisione definitiva venne presa quando il sindaco annunciò che si era giunti a una transazione stragiudiziale e Pierce avrebbe ricevuto 1,5 milioni di dollari. Presentata come una vittoria da tutte le parti in causa, in realtà si trattò di una sconfitta per i contribuenti: una spesa di 4,4 milioni di dollari. Al milione e mezzo dell'accordo bisognava infatti aggiungere 1,3 milioni pagati allo studio esterno (forse sarebbe più esatto parlare di 1,3 milioni di parcella) e altri 1,6 versati a titolo transattivo ai superiori di Pierce, che avevano fatto causa sostenendo di essere stati ingiustamente sospesi in seguito al putiferio sollevato dal caso[2].

Due conclusioni

Ad essere onesto, devo subito ammettere di conoscere molto poco il sistema legale. Sono stato per due volte giurato di riserva. È il peggio del peggio: bisogna stare molto attenti, ma non si arriva a votare. Sono giunto, però, a due conclusioni che mi sembrano evidenti: una aritmetica e l'altra logica. Quella aritmetica è che pagare uno studio esterno è forse una scelta addirittura meno conveniente che sottoscrivere un'estensione di garanzia per un frigorifero. La maggioranza delle volte gli avvocati raggiungeranno, come in questo caso, una conclusione identica a quella dell'avvocato del Comune, cioè che bisognasse trovare una conciliazione. Quando arrivano alla conclusione opposta, a chi si darà ragione? A loro o all'avvocato del Comune, che per lo meno si presume conosca bene la propria città? In aggiunta, il costo di uno studio esterno in questo caso ammontava a quasi il 50% dell'accordo proposto. Come può qualcuno prendere anche solo in considerazione una garanzia aggiuntiva che costi il 50% dell'oggetto acquistato?

La conclusione logica, che prevede anch'essa un certo uso dell'aritmetica, è che la città dovrebbe affrontare il giudizio in cause come questa difendendosi con accanimento. In questo caso è un po' più difficile immaginare il valore atteso di un giudizio, perché anche se si otterrà una sentenza sfavorevole, non è chiara la somma che proporrà la giuria a titolo di risarcimento. Sebbene sia difficile credere che qualche boccone di cibo per cani possa causare uno stress emotivo da 2,7 milioni di dollari, credere che possa farlo per 7 milioni è assolutamente impensabile.

L’aritmetica in tribunale

Come arriva una giuria a decidere l’ammontare di un risarcimento in una causa civile? Quello che so, l’ho appreso per esperienza diretta come giurato di riserva per una causa civile, vinta dal citante. A tutti i giurati, esclusi quelli di riserva, venne chiesto di decidere l’ammontare del risarcimento. Il giudice poi diede alla giuria una disposizione che mi lasciò stupefatto, e sì che la mia soglia dello stupore è molto alta. Nel decidere la somma, ai giurati era proibito il ricorso a qualsiasi tipo di procedimento matematico, come ad esempio il calcolo della media delle somme suggerite dai singoli giurati. A malapena riuscii a trattenermi dal dire che *qualsiasi* tentativo di stabilire l’ammontare di un risarcimento costituisce un procedimento aritmetico, dato che ha a che fare con i numeri. Fossi stato in una riunione di dipartimento, avrei aperto bocca, ma non mi piaceva l’idea di un soggiorno in galera per oltraggio alla corte. Perfino se qualcuno avesse suggerito una cifra e qualcun altro avesse detto «mi sembra troppo», quest’ultimo avrebbe applicato il procedimento aritmetico del confronto. Nell’eventualità in cui qualcuno che ha rapporti con il sistema giudiziario possa leggere quanto ho scritto, permettetemi di dare un suggerimento per determinare l’ammontare di un risarcimento: lasciate che i giurati ne discutano per un tempo prestabilito e poi ognuno di loro dica la somma che gli parrà equa. Per determinare la sentenza, servitevi di un calcolo utilizzato anche per i punteggi della ginnastica artistica: eliminate le due cifre più alte e le due più basse e considerate la media delle otto restanti.

Tornando ora a una stima del valore atteso nel portare avanti una causa, servirebbe una conoscenza dei precedenti di azioni legali simili per poter stabilire sia la probabilità di un verdetto sfavorevole, sia il costo verosimile di esso. Nel primo caso, bisogna tener conto del fatto che la decisione deve essere presa all’unanimità: se un solo giurato su 12 ritiene la causa futile o infondata, la città vince. In riferimento al caso in questione, se il 95% della popolazione avesse ritenuto che il vigile del fuoco meritava di vincere la causa e fosse stata scelta con criteri casuali una giuria di 12 persone, la probabilità che almeno uno di loro considerasse ingiusta quella vittoria sarebbe stata di circa il 46%. Se soltanto il 90% della popolazione avesse pensato che il vigile del fuoco meritava di vincere e fosse stata scelta con criteri casuali una giuria di 12 persone, la probabilità che almeno un giurato ritenesse che non avrebbe dovuto vincere sarebbe salita al 72%. Se un sesto della popolazione avesse stimato che il vigile del fuoco non meritava di vincere la causa, la probabilità che la giura contenesse almeno una persona che la pensava allo stesso modo sarebbe stata di circa il 90%. Il valore atteso del giudizio sembra indubbiamente molto al di sotto dell’accordo per 2,7 milioni di dollari proposto in origine.

Inoltre, logica vuole che se in casi come questi una conciliazione diventa la consuetudine (come pare succeda a Los Angeles), la facilità con cui viene ottenuta tenderà a produrre sempre più cause per motivi futili. Una volta, scherzando, suggerii a una collega dallo spiccato senso dell’umorismo di integrare la nostra pensione con la seguente strategia: chi per primo si fosse ritirato sarebbe stato denunciato dall’altro per molestie sessuali e poi avremmo diviso il risarcimento concordato. Naturalmente, nel nostro caso si trattava solo di uno scherzo, ma considerando con quanta frequenza la “lotteria” delle facili conciliazioni risulta vincente, non mi sorprenderei di leggere di un caso simile in futuro.

Deprezzamento burocratico e svalutazione della vita umana

Sfortunatamente, qualsiasi strumento matematico è un'arma a doppio taglio. Può essere utilizzata per migliorare la vita ma anche per sminuirne il valore. È successo proprio nel luglio 2008, quando un ufficio dell'Environmental Protection Agency ("Agenzia per la protezione dell'ambiente" o EPA) abbassò la propria stima del valore di una vita umana da 8,04 milioni di dollari a 7,22 milioni[3].

Si tratta della cifra cui si fa riferimento come valore della vita di un americano medio quando si vuole calcolare se una data misura sia economicamente conveniente. Naturalmente, si tratta dello stesso tipo di calcolo di cui si serve una casa farmaceutica per decidere se portare avanti una ricerca relativa alla cura per un particolare tipo di malattia. Se negli Stati Uniti soltanto un centinaio di persone contraggono tale morbo e viene stimato che intraprendere un programma di ricerca per arrivare a trovare una cura costerebbe 200 milioni di dollari, significa che il costo a persona sarebbe di 2 milioni. A meno che non sia Bill Gates ad ammalarsi, sarà molto difficile chiedere all'assicurazione del paziente un rimborso di 2 milioni, e con questa cifra la casa farmaceutica pareggerebbe solo i conti.

Nel giudicare il valore di una legge ambientale, l'EPA fa prima una stima di quante vite verrebbero salvate. Ad esempio, la legislazione per limitare l'inquinamento atmosferico dovrebbe diminuire il numero delle morti dovute all'asma. Supponiamo che un programma per la riduzione dell'inquinamento atmosferico salvi un numero stimato di 4000 vite umane e che per finanziarlo sia disponibile un fondo di 30 miliardi di dollari. Se una vita umana è valutata 8,04 milioni di dollari, il valore di 4000 vite è più di 32 miliardi e vale la pena attuarlo, per lo meno dal punto di vista della mera convenienza economica. Se però una vita umana viene valutata 7,22 milioni di dollari, il valore di 4000 vite non raggiunge i 29 miliardi. Di conseguenza, il programma da un punto di vista economico non ha senso.

Svalutare una vita umana, perlomeno finanziariamente, ha perciò l'effetto di ridurre la propensione di un governo a spendere denaro per proteggerla. Nonostante ciò, potete essere ragionevolmente certi che i 30 miliardi di dollari disponibili verranno spesi per qualche altra voce. Forse i soldi verranno dirottati dalla tutela dell'ambiente su qualcos'altro. Potrebbe anche darsi che l'EPA trovi un modo più produttivo di utilizzare tali soldi. Vediamo quale potrebbe essere, considerando uno dei sistemi più comuni con cui il governo ha speso soldi in passato.

La portaerei *USS Ronald Reagan* venne commissionata nel luglio 2008 e costruita affrontando un costo di 5 miliardi di dollari[4]. È davvero una nave magnifica e ha un equipaggio composto da più di 5500 uomini e donne. Considerate la potenza di fuoco e la sofisticata tecnologia sia della nave che dei velivoli che trasporta: probabilmente sarebbe bastata da sola a vincere molte battaglie navali della seconda guerra mondiale. Ma la seconda guerra mondiale è finita. Già possedevamo un discreto numero di portaerei prima che la *Reagan* venisse costruita, ed è difficile capire come la sua esistenza possa dare un significativo contributo alla sicurezza degli Stati Uniti. Proprio come bisognerebbe calcolare il valore dei soldi spesi per le leggi di tutela ambientale in termini di vite salvate, bisognerebbe anche considerare quanti cittadini americani *in più* verrebbero salvati dalla *USS Ronald Reagan*. A mio parere, la cifra più probabile è zero, ma dovrebbe salvarne 700 o giù di lì (se si accetta la stima corrente di una vita umana effettuata dall'EPA) per giustificare la sua esistenza da un punto di vista economico. E senza neanche includere i costi operativi, che ammontano a 2.500.000 dollari per ogni giorno che la *Reagan* trascorre in mare e a 250.000 per ogni giorno che trascorre nel porto. Se rimane al largo per metà dell'anno (e se così non è, perché l'abbiamo costruita?), si tratta approssimativamente di mezzo miliardo di dollari all'anno. Dovrebbe salvare 70 persone in più all'anno. Mi sembrerebbe giusto che, qualora il governo ponesse il veto a un progetto basandosi sul criterio del "valore della vita umana", non dovrebbe poi imbarcarsi in altri che mancano di soddisfare lo stesso criterio. La sola minaccia navale che oscuri l'orizzonte odierno sembra essere quella dei pirati somali e, nel momento in cui scrivo, la conta delle vittime dei loro attacchi è di 3 a 0 a nostro vantaggio.

L'aspetto veramente ironico della costruzione della *USS Ronald Reagan* è che lo stesso presidente l'avrebbe probabilmente impedita, se avesse fatto bene i conti. Dite di lui quel che volete, è sempre stato un fermo sostenitore di uno Stato più leggero e di una politica governativa contraria agli sprechi, ed è davvero difficile vedere la *USS Ronald Reagan* come un investimento conveniente.

Gli Stati Uniti possiedono il più potente esercito del mondo, in termini di grandezza, che costa più di 300 miliardi di dollari l'anno. È davvero necessario? Erano certamente necessari i soldi spesi per vincere la seconda guerra mondiale, una di quelle situazioni in cui non ci si poteva assolutamente permettere di perdere. Potrebbe essere stata una buona idea perfino quella della corsa agli armamenti durante la Guerra Fredda. Eppure, sebbene dalla Russia e dalla Cina provengano segnali inquietanti, le due maggiori minacce dichiarate sono costituite dall'Iran e dalla Corea del Nord, che potrebbero avere rapidamente la peggio in un conflitto militare con gli Stati Uniti. Non solo; somme spropositate sono state spese nel tentativo di impedire ai terroristi, per lo più piccoli gruppi di persone, di compiere atti distruttivi. Io, e molti altri, nutriamo dei dubbi sulla convenienza economica di tutto ciò.

Imposta sull'inflazione e drenaggio fiscale

Le imposte migliori, perlomeno dal punto di vista del fisco, sono quelle occulte: le tasse di cui le persone neppure si accorgono. Quasi tutte le imposte sul reddito, sia che vengano riscosse dal fisco a livello federale sia dalle varie agenzie per i singoli Stati, si basano sugli scaglioni d'imposta. Quando il reddito di un individuo passa da uno scaglione al successivo, il reddito aggiuntivo è sottoposto a un'aliquota più alta. Per esempio, gli introiti che rientrano nella fascia che va dai 40.000 ai 50.000 dollari vengono tassati del 10%, ma fra i 50.001 e i 75.000 l'aliquota sale al 12%.

Molti impiegati – e tutti coloro che hanno il sussidio di previdenza – ricevono i cosiddetti aumenti COLA, cioè *Cost of Living Adjustments*, adeguamenti salariali al costo della vita concepiti per compensare l'inflazione. Immaginiamo che nell'esempio precedente un impiegato percepisca un salario di $49.000 e riceva un aumento COLA del 3% per compensare l'inflazione. Ciò farà salire il suo salario a $50.470, situandolo nello scaglione d'imposta successivo. Se gli scaglioni non vengono alzati per compensare l'inflazione, i $470 verranno tassati del 12% invece che del 10%.

La cifra dell'esempio potrà forse sembrare contenuta, specie per il singolo. La California, però, che al momento sta passando una pesante crisi fiscale, sta prendendo in considerazione l'ipotesi di lasciare invariati gli scaglioni d'imposta. Così facendo, si aspetta un miliardo di dollari in più nelle casse dello Stato il prossimo anno.

Quando gli scaglioni d'imposta restano invariati, abbiamo un caso estremo di drenaggio fiscale; ma esistono casi in cui lo Stato li innalza per evitare l'accusa di non voler compensare l'inflazione, però lo fa con un tasso inferiore. Ciò può portare a un'aliquota effettiva dell'imposta sul reddito più alta, anche se quella nominale rimane invariata.

Supponiamo che l'aliquota sia del 20% sulle entrate al di sopra dei $10.000. Una persona con un reddito di $50.000 pagherà quindi il 20% di $50.000 – $10.000 = $40.000, ovvero $8000. Ora $8000 è il 16% di $50.000, ed è questa la sua aliquota effettiva.

Ora ipotizziamo che riceva un COLA del 5% e il governo alzi gli scaglioni d'imposta del 2%. La persona continuerà a pagare il 20% per il reddito superiore allo scaglione minimo, che adesso sarà fino a $10.200 ($10.000 più il 2% di 10.000). Poiché il 5% di $50.000 è $2500, il reddito di questa persona ora sarà $52.500. Pagherà un'aliquota del 20% su $42.300: la differenza cioè fra il suo reddito di $52.500 e lo scaglione minimo fino a $10.200. Il 20% di $42.300 corrisponde a $8460. Una tassa di $8.460 su un reddito di $52.500 corrisponde al versamento di un'aliquota effettiva del 16,11%. Non molto per un singolo ma, se si somma al resto, è abbastanza perché i burocrati si aumentino lo stipendio oltre il livello dell'inflazione. E nessuno se ne accorgerà, eccetto i più attenti.

Una variante della tassa sull'inflazione che può avere effetti sul vostro portafoglio – anche se forse non era questo il suo intento – è la seguente. Varie associazioni mediche pubblicano i valori di riferimento per una serie di esami medici. Al momento in cui scrivo, un livello di colesterolo totale oltre 200 è considerato dannoso, così come il glucosio totale al di sopra di 100. Entrambi questi valori, che indicano il limite inferiore della fascia "dannosa", sono stati abbassati di recente. Prima, un individuo con un valore di colesterolo totale di 210 era ritenuto in salute; dopo lo spostamento di questi "scaglioni", la stessa persona potrebbe risultare un potenziale fruitore di farmaci che abbassano il colesterolo. Desidero concedere ai medici il beneficio del dubbio e pensare che abbiano abbassato tale limite con buone intenzioni. Andrò oltre e immaginerò che la grande maggioranza dei medici consigli a un paziente con un valore di colesterolo di 210 di cambiare alimentazione e di fare attività fisica prima di prescrivergli un farmaco. Ciò nonostante, posso sostenere, senza timore di sbagliare, che i farmaci per ridurre il colesterolo verranno prescritti molto più spesso nella fascia a rischio che ha come limite minimo 200 invece di 220.

[1] *Big Dog* vuol dire anche qualcuno di importante, il "numero uno" (*n.d.t.*).

[2] Per alcuni articoli sul caso Pierce, vedi il sito web del «Los angeles Times»: http://articles.latimes.com/keyword/tennie-pierce.

[3] Vedi naturalnews.com, www.naturalnews.com/023734.html. il valore continua a scendere.

[4] Per altre informazioni sulla USS *Ronald Reagan*, vedi www.reagan.navy.mil/.

14
Come salvare il mondo grazie alla matematica

Esistono gli alieni? • Come possiamo prevenire una guerra nucleare e l'impatto devastante con un asteroide? • Quando arriverà la fine del mondo?

Cos'è esattamente la matematica? Su Dictionary.com (consultato da chi trascorre più tempo su Internet che in biblioteca) viene definita come: «Trattare in modo sistematico le grandezze, le relazioni fra i numeri e le figure geometriche e le relazioni fra quantità espresse per mezzo di simboli». Ecco cosa *è* la matematica, ma in questo libro ci occupiamo soprattutto di quello a cui *serve*, ragion per cui andremo molto al di là di questa definizione. Probabilmente il fine più spettacolare per cui servircene è salvare il mondo.

Forse si tratta di un'affermazione un po' esagerata, ma chi lavora con la matematica rimane continuamente sorpreso dal modo in cui essa ci permette di valutare, prevedere e pianificare le cose. Ovviamente, la matematica da sola non è capace di salvare il mondo, ma può valutare alcune potenziali minacce, prevedere la probabilità che esse si realizzino, stimare se si può fare qualcosa per evitarle e pianificare il modo migliore per utilizzare le nostre risorse.

Non credo che molti lettori di questo libro passeranno notti insonni ad angosciarsi per le profezie apocalittiche sulla fine del mondo o della minaccia di un'invasione aliena, ma entrambe queste preoccupazioni ci permettono di esaminare interessanti usi ipotetici della matematica. Le profezie sulla fine del mondo sembrano avere (fino a ora) una media di attendibilità piuttosto bassa (ricordate il *Millennium Bug* o il cosiddetto "effetto Jupiter"[1]?), ma destano una curiosità sufficiente a produrre molti libri e programmi televisivi su di esse. La profezia sulla fine del mondo che più mi affascina è quella relativa al rompicapo della Torre di Hanoi, a cui vale la pena dedicare un po' di tempo e attenzioni perché: 1) si tratta di matematica; 2) è una bella storia e se ne ritrova un'eco nel classico racconto di fantascienza di Arthur C. Clarke, *I nove miliardi di nomi di Dio*, che si chiude con uno dei migliori finali che io abbia mai letto[2]. Mi riconosco il merito di saper capire quando una storia che leggo è veramente bella. E quando sono andato a cercare delle fonti per la mia analisi di questo racconto ho scoperto che nel 2004 aveva vinto il premio Retro Hugo[3] per il miglior racconto di fantascienza del 1953.

La Torre di Hanoi

Ho letto questo brano in un libro quando ero bambino. Non sono abbastanza bravo come storico per risalire alla fonte originaria, ma darò un riferimento web (di nuovo, accade a chi come me passa più tempo su Internet che in biblioteca).

Nel grande tempio di Benares, egli dice, sotto la volta che segna il centro del mondo, si trova un piatto di ottone su cui sono fissati tre perni di diamante, ognuno alto un cubito e spesso quanto il corpo di un'ape. In uno di questi perni, al momento della creazione, Dio pose 64 dischi d'oro puro, il più grande dei quali poggiava sul piatto di ottone, e gli altri seguivano uno sopra l'altro, via via sempre più piccoli, fino a quello più in alto. È questa la Torre di Brahma. Giorno e notte, senza sosta, i sacerdoti spostano i dischi da un perno all'altro seguendo le leggi fisse e immutabili di Brahma, le quali richiedono che il sacerdote debba spostare non più di un disco alla volta e che debba infilarlo su un perno di modo che non abbia nessun disco più piccolo sotto di sé. Quando tutti i 64 dischi saranno stati così spostati dal perno su cui Dio li aveva posti ai tempi della creazione a uno degli altri perni, la torre, il tempio e i bramini si sgretoleranno in polvere, e il mondo svanirà in un rombo di tuono[4].

Credo che probabilmente Clarke abbia preso da qui l'idea per *I nove miliardi di nomi di Dio*. Ad ogni modo, è piuttosto facile capirne il funzionamento. Supponiamo che 1 sia il numero assegnato al disco di diametro minore e 64 a quello maggiore. Ci serviremo di un diagramma per tenere traccia della collocazione dei dischi sui vari perni.

	PERNO A	PERNO B	PERNO C	DISCHI SPOSTATI
INIZIO	64 fino a 1			

Come prima mossa, spostiamo il disco 1 dal Perno A al Perno B.

	PERNO A	PERNO B	PERNO C	DISCHI SPOSTATI
1ª MOSSA	64 fino a 2	1		1

Con ciò voglio dire che abbiamo una piccola pila (1 disco) su un altro perno che abbia sempre il disco più grande alla base.

	PERNO A	PERNO B	PERNO C	DISCHI SPOSTATI
2ª MOSSA	64 fino a 3	1	2	
3ª MOSSA	64 fino a 3		2 fino a 1	2

Ora il Perno C raccoglie una pila di 2 dischi (il più piccolo e quello immediatamente successivo), con il disco più grande alla base.

	PERNO A	PERNO B	PERNO C	DISCHI SPOSTATI
4ª MOSSA	64 fino a 4	3	2 fino a 1	
5ª MOSSA	64 fino a 4,1	3	2	
6ª MOSSA	64 fino a 4,1	3 fino a 2		
7ª MOSSA	64 fino a 4	3 fino a 1		3

E adesso il Perno B raccoglie una pila formata dai tre dischi più piccoli, con il più grande alla base e il più piccolo in cima.

Mostrate lo schema 1, 3, 7 a un matematico e noterà che ogni numero è inferiore di 1 rispetto alla potenza successiva di 2 : 1 è inferiore di 1 rispetto a 2; 3 è inferiore di 1 rispetto a 4; 7 è inferiore di 1 rispetto a 8. Poi il matematico supporrà che ci vogliano $2^{64} - 1$ mosse per spostare 64 dischi.

Non è difficile capire perché. Immaginiamo di aver già formato su un altro perno una pila di dischi che vanno da 1 a 26 nell'ordine appropriato. Adesso dobbiamo spostare il disco 27 su un perno libero e ripetere l'intera sequenza di mosse già eseguite per spostare i dischi da 1 a 26 sopra il disco 27. Quindi, qualsiasi sia stato il numero di mosse necessarie per spostare una pila di 26 dischi, per spostarne una di 27 ci vorranno due volte quelle mosse più una. È proprio questa la regola che genera la sequenza 1, 3, 7, 15, 31,... ogni numero è il doppio del precedente più uno, e ogni numero è anche inferiore di uno rispetto alla potenza appropriata di 2.

Ora che sappiamo quante mosse ci vorranno, possiamo fare una stima di quanto ci vorrà per la fine del mondo. Se i sacerdoti sono sufficientemente veloci, potrebbero riuscire a spostare un disco ogni 3 secondi. Si tratta di circa 1.750.000.000.000 anni – e considerato che l'universo esiste solo da 14 miliardi di anni o giù di lì, è la mia ipotesi preferita sulla fine del mondo. Non resterò in circolazione per i prossimi 1736 miliardi di anni (a meno che la clonazione non venga perfezionata e sia alla portata dei professori di matematica), ma finora lo spettacolo è stato interessante e preferirei che non finisse troppo presto. C'è da notare che il brano precedente si riferisce alla fine dei mondi, cioè probabilmente alla fine dell'universo, ma il tempo che rimane per la Terra è notevolmente di meno, dato che il sole si espanderà fino a diventare una gigante rossa e distruggerà il nostro pianeta fra qualche miliardo di anni. Forse quando il sole comincerà a espandersi, i monaci potranno trasportare i perni e i dischi in una galassia lontana e continuare lì il loro lavoro.

L'equazione di Drake

Non sono certo che H.G. Wells sia stato il primo a immaginare l'invasione di una razza aliena senziente decisa a dominare il mondo, ma il suo classico racconto di fantascienza *La guerra dei mondi*[5] è stato trasformato in un film e ha dato vita a infinite imitazioni. Mezzo secolo fa, un gruppo di scienziati ipotizzò degli alieni più miti e gentili di quelli creati da Wells. Questi scienziati si incontrarono per la prima volta a Green Bank, in West Virginia, con lo scopo di lanciare un programma oggi noto come SETI, *Search for Extra-Terrestrial Intelligence* ("ricerca di intelligenze extraterrestri"). Uno dei partecipanti era Frank Drake, che propose un calcolo di valore atteso per determinare N, il numero di civiltà esistenti nella galassia con cui fosse possibile comunicare. Questo calcolo di valore atteso venne presentato con la formula che segue, ora nota come equazione di Drake[6].

$$N = R^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$$

Ognuno dei sette fattori sul lato destro dell'equazione rappresenta essenzialmente una congettura. Quello che segue è una definizione di quei fattori, l'originaria stima numerica che ne fece Drake e qualcosa sulle opinioni attuali riguardo ai loro valori. Dopo che vi avrò dato tali informazioni, calcoleremo la stima di Drake di N e discuteremo di come quella cifra potrebbe variare grazie a dati di recente acquisizione.

R^* rappresenta il tasso di formazione delle stelle nella galassia: quante nuove stelle nascono ogni anno. Drake stimava che il numero equivalesse a 10; negli ultimi cinquant'anni, tecnologie più avanzate hanno fatto sì che la NASA lo valuti uguale a 7.

f_p indica la frazione di stelle che hanno pianeti. Drake, senza altro riferimento che il sistema solare, stimò questo valore come 0,5. Ora la caccia ai pianeti è divenuta un'arte raffinata. Si conosce l'esistenza di più di 300 pianeti al di fuori del sistema solare, e l'attuale tecnologia ci permette di trovare solo quelli veramente grandi. Certo, la stima di Drake era una supposizione, e per il momento atteniamoci al valore di 0,5, con la consapevolezza che potrebbe con molta probabilità essere più alto. Non so se sia *mai* stata scoperta una stella di cui si sappia che *non* ha pianeti.

n_e è il numero medio di pianeti abitabili per ogni stella con dei pianeti. Drake stima che questo numero sia 2, ma oggi l'opinione generale è che probabilmente sia un valore molto più piccolo. La zona abitabile, in cui la temperatura dei pianeti non è né troppo calda, né troppo fredda per permettere la vita, è generalmente abbastanza ristretta. Inoltre, la stella madre deve avere un periodo di stabilità abbastanza lungo e fornire elementi pesanti a sufficienza da permettere la vita. Sull'argomento non sono riuscito a trovare un'opinione prevalente, ma esistono relativamente pochi pianeti scoperti in zone abitabili.

f_l è la frazione di pianeti abitabili su cui effettivamente si è sviluppata la vita. La stima di Drake equivale a 1, e recenti argomentazioni basate sulla quantità di tempo necessaria all'evoluzione della vita sulla Terra hanno concluso che tale frazione è maggiore di 0,13. La domanda è essenzialmente questa: se ci sono le condizioni adatte, quanto è inevitabile la vita?

f_i è la frazione di pianeti f_l su cui si è evoluta una forma di vita intelligente. Drake la stimò in 0,01. Nessuno ne ha la minima idea ed è probabilmente una supposizione buona quanto un'altra.

f_c è la frazione di pianeti su cui esistono forme di vita intelligenti le cui specie hanno sviluppato la capacità di comunicare con altre forme di vita e sono desiderose di farlo. Di nuovo, Drake ipotizzò un valore di 0,01. Sulla Terra sono esistite forme di vita intelligente per centinaia di milioni di anni prima che una combinazione di eventi abbia innescato l'ascesa dei mammiferi, la comparsa dell'uomo e lo sviluppo di una civiltà tecnologica, quindi a me queste cifre sembrano alte, ma chi può dirlo?

L è l'attesa di vita di queste civiltà in relazione al periodo in cui potrebbero comunicare attraverso lo spazio interstellare. Drake ipotizzò che fosse di 10.000 anni. La nostra civiltà possiede questa capacità da meno di 100 anni; ma, per quanto ne sappiamo, una civiltà, una volta superati i problemi di sviluppo, potrebbe durare per milioni di anni.

Drake calcolò $N = 10 \times 0{,}5 \times 2 \times 1 \times 0{,}01 \times 0{,}01 \times 10.000 = 10$. Soprattutto, per quanto riguarda gli ultimi tre valori, si tratta di supposizioni azzardate: se le civiltà intelligenti fossero longeve, tale numero potrebbe aumentare di un fattore 1000. Se però le forme di intelligenza sono rare e l'evoluzione di una civiltà tecnologica lo è altrettanto, questo numero potrebbe scendere ben al di sotto di 1. Perciò, chi può dirlo?

D'altra parte, non ci stiamo occupando della questione di quante civiltà esistano là fuori e desiderino comunicare con noi; ci stiamo interrogando su quanto siano possibili scenari come quelli dipinti ne *La guerra dei mondi* o nel film *Indipendence Day*. Quindi cominciamo dall'equazione di Drake e facciamo per conto nostro qualche calcolo di valore atteso. Supponiamo che H sia il numero delle civiltà ostili capaci di arrivare fin qui e desiderose di distruggerci per qualsivoglia ragione. Allora

$$H = N \times f_a \times f_g \times f_h$$

N è il numero delle civiltà in grado di comunicare con noi, come determinato dall'equazione di Drake; f_a rappresenta la frazione di quelle civiltà davvero in grado di giungere fino a noi da dovunque si trovino. Nel sistema solare non ne esiste nessuna e, da quanto ci dicono le nostre conoscenze di fisica, arrivare qui è molto più difficile di quanto *Star Trek* ci vorrebbe far credere.

Proseguendo, f_g è la frazione delle civiltà capaci di giungere da noi che lo faranno davvero. Prima di tutto, si tratta di una grande galassia, e noi siamo sperduti in periferia. Una civiltà in grado di arrivare fin qui potrebbe decidere di avere migliori prospettive in una parte più densamente popolata della galassia. A peggiorare le cose, ci sarebbe l'aspetto economico del viaggio: potrebbe essere troppo costoso in termini di tempo, fatica e risorse perché un'altra civiltà se ne prendesse la briga. Considerato il fatto che possiamo ottenere molto semplicemente servendoci di Internet, una civiltà avanzata potrebbe decidere di mettersi a chattare con noi. Sempre che gli alieni si accorgano della nostra presenza.

Per finire, f_h è la frazione di quelle civiltà che davvero giungeranno da noi con intenzioni ostili o con nociva inconsapevolezza, proprio come noi calpestiamo delle formiche senza accorgercene. Una cosa è certa: sicuramente potrebbero vincere qualsiasi nostra resistenza, ma a loro importerebbe?

Arthur C. Clarke, nello stesso decennio in cui scrisse *I nove miliardi di nomi di Dio*, scrisse anche il romanzo *Le guide del tramonto*[7] sull'arrivo di una civiltà extraterrestre con la missione di far progredire l'umanità fino allo stadio successivo della sua evoluzione.

Tutto considerato, anche dando a *N* il più alto valore che possano prevedere delle stime ottimistiche, sono convinto che i valori bassi degli altri fattori rendano estremamente improbabile la preoccupazione di invasioni ostili provenienti dallo spazio. Sono *molto* più preoccupato riguardo ai due scenari che esaminerò nel resto del capitolo, e credo per buoni motivi. Entrambi presentano situazioni in cui i calcoli di valore atteso *possono* fornire una guida chiara ai passi che si dovrebbero intraprendere per salvare il mondo.

5 febbraio 1958

Come newyorkese di nascita e losangelino di adozione, non ho mai inserito nell'elenco delle cose da fare una visita nel Sud-est degli Stati Uniti; e dopo aver visto un programma televisivo sugli eventi del 5 febbraio 1958, non ho certo cambiato idea. Quella sera, un bombardiere B-47 Stratojet venne urtato in volo da un F-86 Saberjet che gli portò via un'ala. Il pilota del B-47, il maggiore Howard Richardson, compì una manovra altrettanto stupefacente di quella eseguita dal capitano Chesley Sullenberger mezzo secolo più tardi: riuscì a riportare indietro il suo aereo gravemente danneggiato senza perdite di vite umane. Per farlo, però, dovette sganciare in volo la bomba che trasportava: una H Mark 15 da quasi 4 tonnellate, con una potenza esplosiva da 1,5 megatoni. La bomba finì sepolta sul fondo dell'oceano al largo dell'isola Tybee, dove, per quanto è dato saperne, si trova tuttora. L'aeronautica militare americana non è riuscita a localizzarla, le operazioni di recupero non sono riuscite a individuarla – perlomeno quelle di cui ci è stata data notizia – e giace ancora lì, mezzo secolo dopo[8].

Se la bomba esplode, non porrà fine alla vita su questo pianeta. Se ne esplodessero un po', però, potrebbero farlo. In termini di valore atteso, il numero di vittime dipende dalla probabilità che la bomba scoppi in una zona popolata e dalla potenza esplosiva dell'ordigno. Per lo più, le superpotenze in possesso della maggior parte delle bombe atomiche e all'idrogeno hanno compiuto un lavoro lodevole: non è stato fatto alcun uso ostile di tali armi dal 9 agosto 1945, quando la seconda atomica scoppiò su Nagasaki. Il crollo dell'Unione Sovietica ha suscitato la forte preoccupazione che parte del suo arsenale nucleare e termonucleare potesse cadere nelle mani di persone che avrebbero potuto sentirsi spinte a farne uso, senza considerare il prezzo che loro stesse avrebbero dovuto pagare, ma fino a oggi non è accaduto nulla di catastrofico.

Non sono al corrente della stima dell'arsenale nucleare mondiale. Per lo più se ne conosce l'esistenza e, nonostante il *Dottor Stranamore*, la probabilità che un ufficiale dell'esercito americano senza scrupoli riesca a lanciare o sganciare un'arma nucleare appare estremamente bassa. Possiamo solo sperare che lo stesso valga per le armi nucleari realizzate dalle altre potenze. Eppure c'è un passo importante che gli Stati Uniti e le altre potenze nucleari dovrebbero compiere per ridurre la possibilità che il pianeta finisca per un olocausto termonucleare: ridurre la potenza esplosiva degli ordigni e, così facendo, cambiare significativamente il valore atteso (in termini di vite umane) della loro esistenza.

Le armi nucleari esistono, e sebbene ci sia chi pensa che sarebbe bello se queste spade fossero trasformate in aratri, quasi sicuramente ciò non accadrà. Eppure, che bisogno abbiamo di armi termonucleari? Se una nazione se ne serve come deterrente, una bomba atomica andrà altrettanto bene di una all'idrogeno, e solo con una piccola parte dei megatoni di quest'ultima. Le bombe esplose su Hiroshima e Nagasaki avevano una potenza stimata di 20.000 tonnellate di TNT, e basta soltanto guardare le immagini post apocalittiche di quelle città per rendersi conto che una bomba simile fatta esplodere su *qualsiasi* metropoli del mondo causerebbe uno scempio indicibile. La più grande bomba h esistente si ritiene abbia una potenza di 50 megatoni, ossia 50.000.000 di tonnellate di TNT. Se qualcosa può fungere da deterrente assoluto, è una bomba atomica. Qualora succedesse qualcosa di folle e ne esplodessero solo alcune, il pianeta potrebbe sopravvivere. Se riuscirebbe o meno a sopravvivere alla detonazione di alcune grandi bombe h è materia di dibattito scientifico. Nessuna nazione abbassa la propria capacità deterrente riducendo la carica esplosiva del proprio arsenale nucleare, ma tutte ne beneficerebbero se adottassero di comune accordo una simile strategia.

Una visita alla penisola dello Yucatán

Quasi sicuramente era una bella giornata, poiché il Cretaceo era caratterizzato da un clima sostanzialmente mite. Si ritiene che durante il periodo più caldo, la temperatura della superficie marina superasse i 38 gradi, più che in molte piscine riscaldate. Ad ogni modo, l'abbondanza di vita di quell'epoca indica che il riscaldamento globale potrebbe trasformare drasticamente la vita sulla Terra, ma non la cancellerebbe. Eppure, un evento che si verificò in un giorno molto probabilmente caldo, quasi ci riuscì.

Non esistevano occhi umani in grado di testimoniare i cataclismi di quel giorno, ma dev'essersi trattato di uno spettacolo impressionante. Una palla di fuoco solcò il cielo e un enorme meteorite precipitò sulla penisola dello Yucatán, in Messico, lasciando una fossa enorme, nota come cratere di Chicxulub (dal paese situato in prossimità del suo centro), con un diametro di oltre 175 chilometri[9]. L'impatto è stato stimato equivalente a una potenza di 100 bilioni di tonnellate di TNT; per fare un paragone, come abbiamo appena ricordato, la più grande bomba h mai fatta esplodere aveva una potenza approssimativa di 50 megatoni, ossia 50 milioni di tonnellate di TNT; quindi l'impatto del meteorite equivalse a 2 milioni di bombe come quella, che esplosero tutte contemporaneamente nello stesso posto. Definirlo un evento devastante è di gran lunga un eufemismo. Spazzò via il 70 per cento delle specie sul pianeta, mettendo fine al regno dei dinosauri, che era durato 160 milioni di anni. Un peccato per i dinosauri, ma una fortuna per noi. I mammiferi, che durante l'era di quei bestioni erano a malapena riusciti a tirare avanti, riempirono in fretta le nicchie ecologiche createsi dopo l'impatto. Sessantacinque milioni di anni dopo, eccoci qui.

Anche i meteoriti esistono ancora. Uno scoppiò per la resistenza dell'atmosfera nel 1908 sopra Tunguska, con una potenza esplosiva stimata fra i 5 milioni e i 30 milioni di tonnellate di TNT. Accadde in una zona così remota che la perdita di vite fu minima, ma il prossimo potrebbe colpire New York o Tokyo.

Peggio ancora, il prossimo potrebbe essere più grande, molto più grande. In base ai calcoli, il meteorite di Tunguska dovrebbe avere avuto un diametro di poche decine di metri. Secondo uno studio pubblicato dal Jet Propulsion Laboratory, un asteroide del diametro di un chilometro colpisce la Terra mediamente una volta ogni milione di anni e un evento del genere metterebbe in serio pericolo la specie umana. Un cataclisma delle dimensioni di quello di Chicxulub si verifica una volta ogni 50-100 milioni di anni e quasi certamente sgombrerebbe la strada alla specie che ci soppianterebbe, se ne rimanesse qualcuna per farlo.

Nella storia del pianeta – e forse in quella dell'intero universo – noi siamo l'unica specie in grado di prevenire una tale catastrofe.

99942 Apòfi

Nel 2004, per un breve periodo, pareva che la probabilità che un asteroide di dimensioni notevoli colpisse la Terra fosse quasi uguale a quella di far uscire un due lanciando una coppia di dadi.

Apòfi (in inglese *Apophis*, dal nome di un alieno della serie televisiva *Stargate SG-1* che aveva tentato di distruggere la Terra) è un asteroide *near-Earth* con un diametro di più di 300 metri, ed è stato calcolato che nel 2029 la sua orbita lo porterà vicino alla Terra. Troppo vicino per non destare preoccupazione. La stima attuale è che passerà *sotto* il livello dei satelliti geostazionari ora in orbita, ma, grazie al cielo, non colpirà la Terra. Se così non accadrà, possiamo aspettarci un urto che avrà un'energia cinque volte maggiore dell'eruzione del 1883 sull'isola di Krakatoa. Sarebbe a dire l'evento più devastante accaduto sulla Terra in epoca storica documentata. Oltre alla distruzione normalmente provocata da un'esplosione vulcanica, quella di Krakatoa provocò cambiamenti nel clima del pianeta per quasi cinque anni. Se Apòfi colpirà la Terra, possiamo aspettarci una catastrofe di dimensioni apocalittiche, ma sembra probabile che nel 2029 questo non accadrà. Sebbene le stime iniziali avessero stabilito una probabilità di impatto del 2,7% circa – più o meno la probabilità che esca un due lanciando i dadi (quando si dice farsela sotto!) –, successive misurazioni più accurate hanno escluso tale possibilità. Come Terminator, però, tornerà per riprovarci: nel 2036 e nel 2037. Il suo passaggio vicino alla Terra nel 2029 altererà la sua orbita, e non potrà essere fatta una stima precisa delle probabilità di un impatto nel 2036 e nel 2037 fino al 2013[10].

La NASA prende queste cose molto sul serio e lo stesso dovremmo fare noi. Apòfi è stato scoperto nel giugno 2004, con circa venticinque anni di anticipo sulla data calcolata originariamente per il possibile impatto. Ci sono molti asteroidi intorno a noi e possediamo la tecnologia per trovare e seguire la traiettoria di quasi tutti quelli pericolosi. Dato ancor più importante, abbiamo le capacità per evitare molti di quelli catastrofici, se li scopriamo abbastanza presto e mettiamo insieme le risorse tecnologiche per riuscirci.

Sono stati proposti vari modi per gestire una situazione del genere, dal polverizzare i corpi celesti servendosi di armi termonucleari (magari le grosse testate nucleari potrebbero alla fine servire a qualcosa) a strategie di tutti i tipi per farli deviare dalla loro traiettoria. Si tratta solo di discussioni teoriche, però, perché quasi non esistono fondi destinati a progetti simili.

Qual è il valore atteso di un forte impatto con un asteroide? È al di là di ogni stima: sebbene la probabilità sia bassa, i *pay-off* negativi sono talmente alti da rendere questo valore atteso inaccettabile. Quanto ci conviene prevenirlo? In un'epoca in cui budget da molti miliardi di dollari vengono destinati a sostenere un'economia vacillante, qualche spicciolo (magari pochi miliardi) potrebbe essere "sprecato" per cercare di prevenire l'estinzione dell'umanità. Secondo un articolo sull'edizione on-line di «Usa Today» del 12 agosto 2009, la NASA non ha neanche i fondi per rilevare una grossa percentuale di questi potenziali distruttori della Terra, figuriamoci per sviluppare le strategie adatte per allontanarli.

Il progetto di John F. Kennedy di mandare un americano sulla Luna alla fine degli anni Sessanta fece di più che galvanizzare il Paese: fu un fattore fondamentale del boom aerospaziale che aiutò a rimettere in carreggiata l'economia. La conservazione del nostro pianeta è un obiettivo altrettanto importante di quanto non sia stato mandare un americano sulla Luna, e attualmente potrebbe essere il più importante obiettivo comune che gli abitanti di questo pianeta possano perseguire.

All'inizio di questo libro abbiamo parlato di come la comprensione del valore atteso possa aiutarci a salvare il pianeta. Se il valore atteso di un avvenimento è negativo – come certamente si verifica sia per la collisione con un meteorite che per le catastrofi termonucleari – due sono le vie praticabili. Possiamo cercare di ridurre la probabilità che tali eventi si verifichino, o i *pay-off* negativi che comportano. È difficile immaginare di ridurre i *pay-off* negativi associati all'impatto con un meteorite, quindi faremmo meglio a cercare di diminuire le probabilità che esso accada tramite diagnosi precoci e tempestive contromisure. Per quanto riguarda le catastrofi termonucleari, invece, entrambe le vie sono possibili. La possibilità che si verifichino è sempre stata considerata, motivo per cui le armi termonucleari sono sempre controllate strettamente e fabbricate in modo da ridurre la possibilità di una deflagrazione accidentale. Al culmine della Guerra Fredda, però, l'obiettivo era quello di creare un equilibrio basato sul terrore, e maggiore è la potenza in megatoni degli ordigni, maggiore è il terrore. Indubbiamente, la necessità delle armi nucleari come deterrenti esiste ancora, ma la potenza esplosiva che durante la Guerra Fredda era considerata un vantaggio, ora rappresenta un *pay-off* negativo, e un buon inizio sulla strada verso la salvezza del pianeta sarebbe eliminare, per quanto possibile, questi potenziali distruttori. Magari se ne può risparmiare qualcuno, nel caso possa tornarci utile per Apòfi.

[1] Stephen Plagemann e John Gribbin della nasa nel '74 sconvolsero l'america prevedendo una particolare configurazione di pianeti che avrebbe ribaltato i campi magnetici (*n.d.t.*).

[2] A.C. Clarke, *The Nine Billion Names of God: The Best Short Stories of Arthur C. Clarke*, harcourt, Brace & World, new York 1967 (trad. it. *I nove miliardi di nomi di Dio e altri racconti*, Gallucci, Roma 2011).

[3] Variante del premio letterario hugo che viene assegnato retroattivamente dalla World Science Fiction Society alle opere fantascientifiche che non furono premiate all'epoca della loro prima pubblicazione (*n.d.t.*).

[4] Vedi il sito http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Tower+of+hanoi. in italiano è possibile trovare notizie sulla Torre di Hanoi e sugli algoritmi a essa collegati sul sito http://it.wikipedia.org/wiki/Torre_di_hanoi (*n.d.t.*).

[5] H.G. Wells, *War of the Worlds*, Harper & Brothers, New York 1898 (trad. it. *La guerra dei mondi*, Mursia, Milano 1991) (*n.d.t.*).

[6] Per altre notizie sull'equazione di Drake, vedi www.activemind.com/Mysterious/Topics/SETI/drake_equation.html.

[7] A.C. Clarke, *Childhood's End*, Booker&Thomas, 2009 (trad. it *Le guide del tramonto*, Mondadori, Milano 1984) (*n.d.t.*).

[8] Vedi *Interest in Lost H-bomb resurfaces* ("si riaccende l'interesse per la bomba H scomparsa"), www.usatoday.com/news/nation/2004-10-19-h-bomb-search_x.htm.

[9] Vedi *Effects of the Discovery* ("Effetti della scoperta"), http://palaeo.gly.bris.ac.uk/communication/hanks/eff.html.

[10] Vedi *Predicting Apophis' Earth Encounters in 2029 and 2036* ("Previsioni sull'incontro fra apòfi e la Terra nel 2029 e nel 2036"), sul sito web della NASA, http://neo.jpl.nasa.gov/apophis/. In italiano si possono trovare informazioni aggiornate al 2013 sul sito http://it.wikipedia.org/wiki/99942_apophis#Dati_principali.

Indice